

Corrigé de l'examen Equations Fractionnaires

035 Exercice 01: 1) on trouve $\frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{1}{s-2} - \frac{s}{s^2+1}$ (N)

2) La transformée de Laplace de l'équation différentielle est:

$$s^2 Y - 2 - \frac{5}{2} s Y + Y = -\frac{5}{2} \frac{1}{s^2+1} \quad 0.15$$

$$\text{d'où } Y = \frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)} \quad (N)$$

et l'on déduit du (1) que $y(x) = e^{2x} - \cos x$ (N)
qui vérifie bien les conditions initiales. (N)

Exercice 02: On a: $f'(x) = \sin(wx) + xw \cos(wx)$ donc.

$$f''(x) = w \cos wx + w \cos wx - xw^2 \sin wx \quad (N)$$
$$= 2w \cos(wx) - w^2 f(x).$$

2) En prenant la transformée de Laplace de f'' on trouve

$$s^2 \mathcal{L}(f) - s f(0) - f'(0) = \frac{2ws}{s^2+w^2} - w^2 \mathcal{L}(f)$$

$$\text{d'où } \mathcal{L}(f) = \frac{2ws}{(s^2+w^2)^2} \quad (N)$$

3) on en déduit:

$$\frac{s}{(s^2+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}s}{(s^2+(\sqrt{3})^2)^2} \quad (N)$$

$$= \mathcal{L}\left(\frac{x}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}x\right) \quad (0.15)$$

Exercice 03: 1) Comme f est une fonction convexe
on trouve $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ $\lambda = \frac{1}{2}$.

i.e. $x = ta + (1-t)b$ $y = (1-t)a + tb$.

$$2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)$$

Multiplions les deux membres de l'inégalité par $t^{\alpha-1}$
on trouve:

$$\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta + (1-t)b) dt$$

$$+ \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a + tb) dt.$$

$$= \int_a^b \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{b-a}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[J_a^\alpha f(b) + J_b^\alpha f(a) \right].$$

i.e. $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[J_a^\alpha f(b) + J_b^\alpha f(a) \right]$

d'autre part,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

$$\text{Alors } f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq$$

$$tf(a) + (1-t)f(a) + (1-t)f(b) + tf(b)$$

Multiplions les deux membres de cette inégalité par $t^{\alpha-1}$
on trouve $\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta + (1-t)b) dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a + tb) dt$

$$\leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1} dt.$$

fin.