

Exercice 1

1 La décomposition LU de la matrice A est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix} = L.U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (02) \text{ points.}$$

2 Résolution du système $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$:

On a : $Ax = b \iff LUx = b \iff L(Ux) = b$

Posons : $Ux=y$; on obtient deux systeme lineaires :

$Ly=b \dots\dots\dots (S1)$; $Ux=y \dots\dots\dots (S2)$

$$(S1) \iff \begin{cases} y_1 = 3 \\ 2y_1 + y_2 = 5 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = -6 \end{cases} \dots\dots\dots (01.50) \text{ points.}$$

$$(S2) \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_2 + x_3 = -1 \\ 6x_3 = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases} \dots\dots\dots (01.50) \text{ points.}$$

Exercice 2

On considère le système linéaire (S) : $AX = b$:

avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche résoudre (S) par les méthodes indirectes de type : $X_{k+1} = MX_k + D$:

1 A est symétrique , car $A^t = A \dots\dots\dots (0.50) \text{ points.}$
A est définie positive, car :

$$\Delta_1 = |a_{11}| = 2 \geq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 3 \geq 0 \text{ et } \Delta_3 = \det(A) = 4 \geq 0 \dots\dots (01) \text{ point.}$$

donc A est symétrique définie positive.

2 A est diagonalement dominante, car :

$$\begin{aligned} |a_{11}| = 2 &\geq |a_{12}| + |a_{13}| = 1 \\ |a_{22}| = 2 &\geq |a_{21}| + |a_{23}| = 2 \\ |a_{33}| = 2 &\geq |a_{31}| + |a_{32}| = 1 \dots\dots\dots (01) \text{ point.} \end{aligned}$$

- 3 Résolution du système (S) avec la méthode itérative de Jacobi en partant du vecteur de départ initiale $X^{(0)} = (0; 0; 0)$ et avec 2 itérations :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 + y) \\ y = \frac{1}{2}(x + z) \\ z = \frac{1}{2}(1 + y) \end{cases}$$

Donc par la méthode itérative de Jacobi on obtient :

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{2}(x^{(k-1)} + z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(k-1)}) \end{cases} \dots\dots\dots (01) \text{ point.}$$

• 1^{ère} itération pour $k = 1$:

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(0)}) \\ y^{(1)} = \frac{1}{2}(x^{(0)} + z^{(0)}) \\ z^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(0)}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{2} \\ y^{(1)} = 0 \\ z^{(1)} = \frac{1}{2} \end{cases} \dots\dots\dots (01) \text{ point.}$$

• 2^{ème} itération pour $k = 2$:

$$\begin{cases} x^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(1)}) \\ y^{(2)} = \frac{1}{2}(x^{(1)} + z^{(1)}) \\ z^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(1)}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(2)} = \frac{1}{2} \\ y^{(2)} = \frac{1}{2} \\ z^{(2)} = \frac{1}{2} \end{cases} \dots\dots\dots (01) \text{ point.}$$

Donc la solution approximative du système (S) après deux itérations est :
 $(x; y; z) = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

- 4 Résolution du système (S) avec la méthode itérative de Gauss-Seidel en partant du vecteur de départ initiale $X^{(0)} = (1; 1; 1)$ et avec 2 itérations :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 + y) \\ y = \frac{1}{2}(x + z) \\ z = \frac{1}{2}(1 + y) \end{cases}$$

Donc par la méthode itérative de Gauss-Seidel on obtient :

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{2}(x^{(k)} + z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(k)}) \end{cases} \dots\dots\dots (01) \text{ point.}$$

• 1^{ère} itération pour $k = 1$:

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(0)}) \\ y^{(1)} = \frac{1}{2}(x^{(1)} + z^{(0)}) \\ z^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(1)}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(1)} = 1 \\ y^{(1)} = 1 \\ z^{(1)} = 1 \end{cases} \dots\dots\dots (01) \text{ point.}$$

• 2^{eme} itération pour $k = 2$:

$$\begin{cases} x^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(1)}) \\ y^{(2)} = \frac{1}{2}(x^{(2)} + z^{(1)}) \\ z^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + y^{(2)}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(2)} = 1 \\ y^{(2)} = 1 \\ z^{(2)} = 1 \end{cases} \dots\dots\dots(0.50) \text{ point.}$$

Donc la solution approximative du systeme (S) apres deux itération est :
 $(x; y; z) = (1; 1; 1)$

5 Celle de Gauss-Seidel qui converge plus rapidement. Car si le vecteur de départ initiale egale ou plus proche au vecteur solution exate; alors la methode converge plus rapidement.....(01) point.

Exercice 3

1 Résolution par la méthode du pivot de Gauss le système (S) :

$$A^{(1)} = A = \begin{pmatrix} (a+1) & (a-1) \\ (a-1) & (a+1) \end{pmatrix}; b^{(1)} = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(01) \text{ point.}$$

$$\begin{cases} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_1 \rightarrow L_2 - (\frac{a-1}{a+1})L_1 \end{cases} \Leftrightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} (a+1) & (a-1) \\ 0 & \frac{4a}{a+1} \end{pmatrix}; b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{a+1} \end{pmatrix} \dots\dots(01) \text{ point.}$$

$$\text{Donc : (S)} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ \frac{4a}{a+1}y = \frac{2}{a+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2a} \\ y = \frac{1}{2a} \end{cases} \dots\dots\dots(01) \text{ point.}$$

2 On pose $a = 2$. Par la méthode itérative de Jacobi on résoudre le système (S) en partant du vecteur de départ initiale $(x^{(0)}; y^{(0)}) = (0; 0)$ et avec deux itérations :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(1 - y) \\ y = \frac{1}{3}(1 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{3}(1 - y^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{3}(1 - x^{(k-1)}) \end{cases} \dots\dots\dots(01) \text{ point.}$$

• 1^{ere} itération pour $k = 1$:

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{3}(1 - y^{(0)}) \\ y^{(1)} = \frac{1}{3}(1 - x^{(0)}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{3} \\ y^{(1)} = \frac{1}{3} \end{cases} \dots\dots\dots(01) \text{ point.}$$

• 2^{eme} itération pour $k = 2$:

$$\begin{cases} x^{(2)} = \frac{1}{3}(1 - y^{(1)}) \\ y^{(2)} = \frac{1}{3}(1 - x^{(1)}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(2)} = \frac{2}{9} \\ y^{(2)} = \frac{2}{9} \end{cases} \dots\dots\dots(01) \text{ point.}$$

Remarque : Exercice 1 $\hookrightarrow$ 05 points, Exercice 2 $\hookrightarrow$ 09 points et Exercice 3 $\hookrightarrow$ 06 points.

Bonne chance.

Mr. ADOUI Salah