Université de Batna 2. Mathématiques (L2) **Topologie** Semestre 3 (18-19)

Série d'exercices N° 3

La continuité dans les espaces métriques.

Exercice 1

1. *On munit* $E = \{a, b, c\}$ *et* $F = \{1, 2\}$ *respectivement des topologies* $\tau = \{\emptyset, E, \{a\}\}$ *et* $\sigma = \{\emptyset, F, \{2\}\}$ *et on considère la fonction* $f : (E, \tau) \to (F, \sigma)$ *définie par* $f(a) = f(c) = 2, f(b) = 1$. *Étudier la continuité de* f *sur* E.
2. *Montrer que l'application* $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ *définie par* $f(x) = 0$ *est continue, fermée et non ouverte.*
   Montrer que l'application $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_g)$ *définie par* $f(x) = 0$ *est continue, non fermée et non ouverte.*
3. *On pose* $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}, (]a, +\infty[)_{a\in\mathbb{R}}\}$ *et on définit la fonction* $f : (\mathbb{R}, \sigma) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ *par* $f(x) = x^2$. *Étudier la continuité de* f *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ *une application bijective. Démontrer que*

$$f \text{ est ouverte} \Leftrightarrow f \text{ est fermée}$$

Exercice 3

Soient f et g deux applications continues d'un espace métrique E_1 *dans un autre espace métrique* E_2. *On considère la partie* A *de* E_1 *définie comme suit :* $A = \{x \in E_1 : f(x) = g(x)\}$.

- *Montrer que* A *est fermée dans* E_1.
- *Montrer que si* A *est dense dans* E_1 *alors* $f = g$ *sur* E_2.

Exercice 4

Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ *une application continue et surjective.*
Montrer que si A *est une partie dense dans* E, *alors* $f(A)$ *est dense dans* F.
Quand est-ce qu'on peut avoir une équivalence ?

Exercice 5

Soient $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ *une application continue,* $A \subset E$ *et* $f(E) \subseteq B \subseteq F$. *Montrer que les restrictions suivantes sont continues.*

1. $f|_A : (A, d_A) \to (F, d_F)$. *Est-ce qu'il y a une équivalence ?*
2. $f|^B : (E, d_E) \to (B, d_B)$.

Exercice 6

1. *Soit* $X = (0, 1)$ *et* $Y = (a, b)$ *avec* $a < b$ *munis de la distance usuelle. Montrer que la fonction* $f : (0, 1) \to (a, b)$ *définie par* $f(x) = a + (b - a)x$ *est un homéomorphisme.*
2. *Même question pour la fonction* $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *définie par* $f(x) = e^x$.

Exercice 7

Montrer que $\mathbb{R}$ *est homéomorphe à l'intervalle* $(-1, +1)$ (***indication*** *: utiliser la fonction* $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.)

Exercice 8

Étudier la continuité uniforme des fonctions suivantes :

1. $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ *définie par* $f(x) = \sin(x)$.
2. $g : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ *définie par* $g(x) = \sin(x^2)$.

Exercice 9

Soient (E, d) *un espace métrique,* A *une partie non vide de* E *et* $x \in E$.

1. *Démontrer que l'application* $x \mapsto d(x, A)$ *est 1-Lipschitzienne. En déduire qu'elle est uniformément continue.*
2. *Montrer que* $(x \in \overline{A}) \Leftrightarrow (d(x, A) = 0)$.