Examen final : EDO master 01

Exercice 01 : $x'(t) = (1+t^2)(e^{x(t)} - 1)\cdot\cos(x^2(t)) \ldots, x(0)=1 \ldots \ldots (1)$
$(t,x) \in \mathbb{R}^2$

1°) Cherchons les solutions stationnaires pour l'EDO :

Soit $x(t)$ une solution stationnaire c.a.d f^{ct} constante alors $\frac{d}{dt}x(t) = 0$ d'où
$\forall t \in \mathbb{R} : (1+t^2)(e^{x(t)} - 1)\cos(x^2(t)) = 0$.
d'où $e^{x(t)} - 1 = 0$ ou $\cos(x^2(t)) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
il vient que $x(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ ou $x(t) = \pm\sqrt{\pi/_2 + k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

2°) Montrons que le problème de Cauchy (1) admet une unique solution maximale :
Posons $F(t,x) = (1+t^2)(e^x - 1)\cos(x^2)$; $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Cette fonction est de classe C^∞ par rapport à t et à x. D'où elle est C^∞ sur le convexe $\mathbb{R}^2$.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème $x'(t) = F(t,x)$, $x(0)=1$ admet une unique solution maximale locale $\Phi :]T_*, T^*[\longrightarrow \mathbb{R}$,
de plus Φ est de classe C^1 et vérifie $\Phi(0) = 1$, $0 \in]T_*, T^*[= I$

3°) Montrons que $\Phi(t) \in]0, \sqrt{\pi/_2}[$; $\forall t \in I$
D'après la question 1°) les deux fonctions constante $t \longmapsto 0$ et $t \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ sont deux solutions stationnaire de l'EDO, et comme $x(0) = 1$ vérifie que $0 < 1 = x(0) < \sqrt{\pi/_2}$ il vient que la solution maximale $\Phi(\cdot)$ doit être dans l'intervalle $]0, \sqrt{\pi/_2}[$, car d'après théorème de recollement deux solutions de même donnée initiale doivent être soit identiques soit elles ne se coupent jamais.

Autre démonstration : On suppose qu'il existe $t_1 \in I$ avec $\Phi(t_1) = 0$, alors Φ et la solution nulle vérifient le même problème de Cauchy
$$\begin{cases} x'(t) = F(t,x(t)) \\ x(t_1) = 0 \end{cases}$$
donc par unicité on obtient $\Phi(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ce qui est absurde.
De même, on démontre que $\Phi(t) < \sqrt{\pi/_2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

4°) Déduire que $I = \mathbb{R}$ (solution globale) :
Comme Φ est bornée (d'après 3°), Alors d'après le critère d'explosion $T_* = -\infty$, $T_* = +\infty$ d'où $I = \mathbb{R}$