$$dF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu x_1 x_2 - 1 & \mu(1 - x_1^2) \end{pmatrix}$$

d'où $dF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$ et $G(x_1, x_2) = o(\|(x_1, x_2)\|)$, $\|(x_1, x_2)\| \to 0$

Alors le système linéaire associé à (3) est $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} X(t) = A X(t)$

Ce système admet un seul point d'équilibre $(0,0)$.

Pour déterminer sa nature, on calcul les valeurs propre de A.

$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - \mu) + 1 = \lambda^2 - \mu\lambda + 1.$

ici $\Delta = \mu^2 - 4$.

$\Delta = 0$ ssi $\mu = 2$ d'où $\lambda = 1$.
$\Delta < 0$ si $0 < \mu < 2$ d'où $\lambda = \frac{\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2}}{4}$
$\Delta > 0$ si $\mu > 2$ d'où $\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$

Dans tous les cas les valeurs propres ont une partie réelle strictement positive
Ce qui correspond à une instabilité.

L'allure des orbites au voisinage de l'origine

$\lambda = 1$ noeud dégénéré instable. $\lambda = \frac{\mu}{2} \pm \frac{\sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$ noeud instable $\lambda = \frac{\mu \pm i\sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$ foyer instable

4) D'après question 3). toute les valeurs propres vérifient : $\mathrm{Re}\, \lambda \neq 0$. Alors d'après le théorème de linéarisation, il existe un voisinage U de l'origine et un homéomorphisme θ de U dans un voisinage V de l'origine qui envoie une trajectoire du système $X'(t) = dF(0,0) X + G(X)$ à une trajectoire du système linéaire $X'(t) = dF(0,0) \cdot X(t)$. D'où les résultats obtenus pour le système linéaire restent valables pour le système non linéaire (3)

5) On pose $\varphi(x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$ et on définie :

$$E(x(t), x'(t)) = \frac{x^2(t)}{2} + \frac{1}{2}\left(x'(t) + \varphi(x(t))\right)^2.$$