5°/. Montrons que Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

On a $0 < \Phi(t) < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ d'où $\cos(\Phi^2(t)) > 0$.

de plus $e^{\Phi(t)} > e^0 = 1$.

Il vient que $(1+t^2)\left(e^{\Phi(t)} - 1\right)\cos(\Phi^2(t)) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

c.à.d $\frac{d}{dt}\Phi(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. D'où Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6°/. Montrons que $\lim\limits_{t \to -\infty} \Phi(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Or que Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\Phi(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

il vient que si $l = \lim\limits_{t \to -\infty} \Phi(t)$, on doit avoir $l \geq 0$.

Supposons que $l > 0$, alors

$$\lim_{t \to -\infty} (1+t^2)\left(e^{\Phi(t)} - 1\right)\cos(\Phi^2(t)) = +\infty.$$

c.à.d $\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{d}{dt}\Phi(t) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{t \to -\infty} \Phi(t) =$. Ce qui est absurde. Il vient que $l = 0$.

De la même manière pour la deuxième limite.

Exercice 02 : $x''(t) - \mu(1 - x^2(t))x'(t) + x(t) = 0$ --- (2) $\mu > 0$

1°/. Ecrivons l'EDO (2) sous forme $X(t) = F(X(t))$.

Posons $X(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (x(t), x'(t))$. Alors :

$$\frac{d}{dt}X(t) = (x_1'(t), x_2'(t)) = (x'(t), x''(t)) = (x_2(t), \mu(1-x^2(t))x'(t) - x(t))$$

$$= (x_2(t), \mu(1 - x_1^2(t))x_2(t) - x_1(t)) = F(X(t)) \quad \ldots. (3)$$

2°/. Les points d'équilibres pour le système (3) :

Posons $F(X(t)) = 0$ c.à.d $x_2(t) = 0$ et $\mu(1 - x_1^2(t))x_2(t) + x_1(t) = 0$

d'où $x_2(t) = 0$ et $x_1(t) = 0$.

Le seul point stationnaire est l'origine $(0,0)$.

3°/. Le système linéarisé associé au système (3) :

Comme F est de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$ on peut écrire par le biais de la formule de Taylor :

$$F(x_1, x_2) = \underbrace{F(0,0)}_{0} + dF(0,0).(x_1, x_2) + \sigma(x_1, x_2)$$

On sait que :