5.1°/ Calculons :

$$\frac{d}{dt}E(x(t),x'(t)) = x(t)x'(t) + \left(x'(t)+\psi(x(t))\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(x'(t)+\psi(x(t))\right)$$

On remarque que $\frac{d}{dt}\left(x'(t)+\psi(x(t))\right) = x''(t) + \frac{d}{dt}\psi(x(t))$

mais $\psi(x(t)) = \mu\left(\frac{x^3(t)}{3} - x(t)\right)$, d'où $\frac{d}{dt}\psi(x(t)) = \mu\left(x^2(t)x'(t) - x'(t)\right)$

$$= \mu\left(x^2(t) - 1\right)x'(t)$$

d'où $\frac{d}{dt}\left(x'(t)+\psi(x(t))\right) = \mu\left(1-x^2(t)\right)x'(t) - x(t) + \mu\left(x^2(t)-1\right)x'(t)$

$$= -x(t).$$

Il vient que :

$$\frac{d}{dt}E(x(t),x'(t)) = x(t)x'(t) + \left(x'(t)+\psi(x(t))\right)\left(-x(t)\right)$$

$$= -x(t)\psi(x(t)) \quad ; \forall t \geq 0.$$

5.2°/ Pour que E soit une intégrale première, il faut qu'elle soit une fonction constante le long des trajectoires de l'EDO (3). Cela est équivalent à dire que $\frac{d}{dt}E(x(t),x'(t)) = 0$, $\forall t \geq 0$.

D'après la question 5.1°/ cela est vraie ssi $-x\psi(x) = 0$ c-à-d

$x = 0$ ou $\psi(x) = 0$ c-à-d $\mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right) = 0$ d'où $x^2/3 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

D'où E est une intégrale première si $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$.

5.3°/

6°/ Prenons $\mu = 0$ d'où on a l'EDO : $x''(t) + x(t) = 0$ ...(4)

6.1°/ Cette EDO représente le mouvement d'un oscillateur harmonique

6.2°/ La résolution de (4) sous la condition : $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.

On a le polynôme caractéristique $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ d'où une solution sous forme $x(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$, de plus $x'(t) = ic_1 e^{it} - ic_2 e^{-it}$.

d'où

$x(0) = c_1 + c_2 = x_0$ et $x'(0) = i(c_1 - c_2) = x'_0$ d'où $c_1 = \frac{x'_0 + ix_0}{2i}$, $c_2 = \frac{ix_0 - x'_0}{2i}$

d'où $x(t) = \frac{x'_0 + ix_0}{2i}e^{it} + \frac{ix_0 - x'_0}{2i}e^{-it} = x_0\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + x'_0\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$

$x(t) = x_0\cos t + x'_0\sin t$ ; $\forall t \geq 0$.

6.3°/ On voit que la solution est une fonction périodique pour tout $t \geq 0$, D'où les orbites sont des cercles centrées à l'origine