Contrôle Final (Algèbre de Banach)
Corrigé type

Exercice 1

(1) (i) $\{I, T, T^2\}$ partie libre ? En effet,
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ t.q. $\alpha I + \beta T + \gamma T^2 = 0$ (*).

On a $T^2 = T.T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T^3 = T^2.T = 0$.

Par multiplication par T^2 les deux membres de (*),
et comme $T^n = 0$, pour $n \geq 3$, on obtient :
$\alpha . T^2 = 0$; et comme $T^2 \neq 0$, donc $\alpha = 0$.
(*) s'écrit alors $\beta . T + \gamma T^2 = 0$ — (**)
Par multiplication par T, les 2 membres de (**) :
on trouve $\beta . T^2 = 0$; et donc $\beta = 0$.
En utilisant (**), on tire $\gamma = 0$.
Alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$. c.q.f.d
(ii) $\{I, T, T^2\}$ engendre $\mathcal{B}$; donc
$\{I, T, T^2\}$ est une base de $\mathcal{B}$.
(2) (i) $\mathcal{B}$ est s.e.v. de $M_3(\mathbb{C})$, par définition.
(ii) $\mathcal{B}$ stable par rapport à la multip. ?
Soient $A, B \in \mathcal{B}$. Montrons $A.B \in \mathcal{B}$?

En effet, $A = \alpha_1 I + \beta_1 T + \gamma_1 T^2$, $B = \alpha_2 I + \beta_2 T + \gamma_2 T^2$; pour certain $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$.

On a donc $A.B = (\alpha_1\alpha_2)I + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)T + (\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)T^2 \in \mathcal{B}$.

(iii) $\mathcal{B}$ commutative? $A.B = B.A$, facile à prouver.

(iv) $\mathcal{B}$ unitaire, car $I \in \mathcal{B}$.

(3) (i) $T^3 = 0$.

(ii) $\mathcal{B} = \mathcal{P}_T$? Il est clair que $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}_T$?

Montrons $\mathcal{P}_T \subset \mathcal{B}$? Soit $A \in \mathcal{P}_T$.

Donc $A = p(T)$, pour un certain polyn. $\cancel{p(\lambda)}$:

$p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n$.

Alors $A = c_0 I + c_1 T + \dots + c_n T^n$.

Comme $T^k = 0$, pour $k \geq 3$, alors

$A = c_0 I + c_1 T + c_2 T^2 \in \mathcal{B}$. c.q.f.d.

(4) Soit φ un caractère de $\mathcal{B}$, on a: $A = \alpha I + \beta T + \gamma T^2 \in \mathcal{B}$,

Donc pour $\varphi(A) = \alpha + \beta\varphi(T) + \gamma(\varphi(T))^2$.

Comme $T^3 = 0$, alors $0 = \varphi(T^3) = (\varphi(T))^3$;

donc $\varphi(T) = 0$. ce qui montre $\varphi(A) = \alpha$.

Il y a 1 seul caractère donné par

$A = \alpha I + \beta T + \gamma T^2 \longrightarrow \varphi(A) = \alpha$

Exercice 2

(1) (i) T linéaire? Soient $f, g \in C[0,1]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, on a:

$\forall t \in [0,1]$, $(T(\lambda f+g))(t) = t^2(\lambda f+g)(t)$
$= \lambda t^2 f(t) + t^2 g(t)$
$= \lambda (Tf)(t) + (Tg)(t)$
$= [\lambda Tf + Tg](t)$

D'où $T(\lambda f+g) = \lambda Tf + Tg$. c.q.f.d.

(ii) T borné? Soit $f \in C[0,1]$, on a:

$\forall t \in [0,1]$, $|(Tf)(t)| = |t^2 f(t)| \leq t^2 \cdot |f(t)|$
$\leq |f(t)|$

Par passage au sup. sur $t \in [0,1]$, on obtient

$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. c.q.f.d.

(iii) $\|T\| = 1$? D'après (ii), $\|T\| \leq 1$.

Soit $f_0 = 1$ (la fct. unité).

Comme $\|f_0\|_\infty = 1$, alors $1 \geq \|T\| \geq \|Tf_0\|_\infty = 1$. c.q.f.d.

(2) $T - \lambda I$ injectif, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$? En effet: Soit $f \in C[0,1]$ t.q. $(T-\lambda I)f = 0$

cas 1: $\lambda \notin [0,1]$.

Donc $\forall t \in [0,1]$, $(t^2-\lambda)f(t) = 0$.

Comme $0 \leq t^2 \leq 1$, pour tout $t \in [0,1]$,

donc $t^2 - \lambda \neq 0$, pour tout $[0,1]$.

Ce qui montre que: $\forall t \in [0,1], f(t) = 0$.

Donc $f = 0$. Alors $T - \lambda I$ injectif.

Cas 2: $\lambda \in [0,1]$. Soit $f \in C[0,1]$ t.q. $(T - \lambda I) f = 0$.

Donc $\forall t \in [0,1], \quad (t^2 - \lambda) f(t) = 0$ — $(*)$.

Comme l'équation $t^2 - \lambda = 0$, admet une seule solution $t_0 = \sqrt{\lambda}$, sur $[0,1]$.

Donc, de $(*)$, on tire: $\forall t \in [0,1] - \{t_0\}, \ f(t) = 0$.

f étant continue sur $[0,1]$, alors $f = 0$.

Donc $T - \lambda I$ injectif.

Du cas 1 et cas 2, on tire que $T - \lambda I$ est injectif, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

(3)(a) $T - \lambda I$ surj. $\Longleftrightarrow$ ~~$\lambda \notin [0,1]$~~ $\lambda \notin [0,1]$.

"$\Leftarrow$" Supposons $\lambda \notin [0,1]$. Soit $g \in C[0,1]$.

On définit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto f(t) = \frac{g(t)}{t^2 - \lambda}$$

(.) f est bien définie, car $t^2 - \lambda \neq 0$, pour tout $t \in [0,1]$.

(..) f est continue sur $[0,1]$: quotient de deux fonctions continues. Donc $f \in C[0,1]$ et de plus ~~$Tf = g$~~ $(T - \lambda I) f = g$.

Ce qui montre que $T - \lambda I$

"$\Longrightarrow$" Supposons $T-\lambda I$ surjectif. Montrons que $\lambda \notin [0,1]$.

Par l'absurde, supp. $\lambda \in [0,1]$.

Il existe alors $f \in C[0,1]$ t.q: $(T-\lambda I)f = 1$,

(car $T-\lambda I$ surjectif). Comme $\sqrt{\lambda} \in [0,1]$,

alors $[(T-\lambda I)f](\sqrt{\lambda}) = 1$.

$0 = 1$. Impossible.

Donc

Donc $\lambda \notin [0,1]$.

(b) de (a) On tire (3).

(4) $\sigma(T) \overset{\text{déf}}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ non inv.}\}$

$= \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ non bij.}\}$ (car $C[0,1]$ Banach)

$= \{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ non surjectif}\}$ (car $T-\lambda I$ inj. pour tout λ)

$= [0,1]$. (d'après (3)).

Exercice 3

(1) Comme $ST = TS$, donc $T^{-1}S^{-1} = (ST)^{-1} = (TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

(2) On suppose $T^* = T$.

(i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Comme $(-\lambda)i \notin \mathbb{R}$, et $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,

donc $T + i\lambda I = T - i(-\lambda)I$ est inversible.

(ii) D'après (i) : $T - iI$ et $T + iI$ sont inversibles, et commutes

$S^* S = I$? En effet :

$$S^* S = \left[(T - iI)^{-1}.(T + iI)\right]^* . \left[(T - iI)^{-1}(T + iI)\right]$$

$$= (T - iI).(T + iI)^{-1}.(T - iI)^{-1}.(T + iI)$$

$$= (T - iI).(T - iI)^{-1}.(T + iI)^{-1}.(T + iI) \quad (1)$$

$$= I \times I = 1.$$

$SS^* = I$? En effet :

$$SS^* = \left[(T - iI)^{-1}.(T + iI)\right].\left[(T - iI)^{-1}.(T + iI)^{-1}\right]^*$$

$$= (T - iI)^{-1}(T + iI)(T - iI).(T + iI)^{-1}$$

$$= (T - iI)^{-1}.(T - iI).(T + iI)(T + iI)^{-1}$$

$$= I \times I = I.$$

(3) (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons (i) vraie. Donc

T unitaire et $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

T est donc normal à spectre réel ;

alors $T^* = T$.

Or $T^* T = I$, donc $T^2 = I$.

Ce qui montre (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons (ii) vraie.

Comme $T^* = T$, donc $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

et comme $T^2 = I$, donc $T^* T = T T^* = T^2 = I$.

Ce qui montre (i).

Exercice 4

(1) Comme $A = \overline{P_T}$, et comme étant une algèbre commutative et unitaire; donc $A = \overline{P_T}$ est une algèbre de Banach commutative et unitaire.

(2) Comme $\sigma(T) = \{\varphi(T) : \varphi \in Car(A)\}$,

alors Γ est bien définie. et $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$.

(3) Soit $\varphi \in Car(A)$, et multiplicative, alors φ étant linéaire

$$\varphi(p(T)) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} c_i T^i\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi(T^i) \quad (\varphi \text{ lin.})$$
$$= \sum_{i=0}^{n} c_i (\varphi(T))^n \quad (\varphi \text{ mult.})$$
$$= p(\sigma(T)).$$

(4) Γ injectif ? En effet,

Soient $\varphi, \psi \in \mathrm{Car}(\mathcal{A})$ t.q. $\Gamma\varphi = \Gamma\psi$.

Alors $\quad \varphi(T) = \psi(T)$ — $(*)$

(•) Montrons que $\varphi = \psi$ sur $\mathcal{P}_T$? En effet,

Soit $A = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} c_i T^i}_{p(T)} \in \mathcal{P}_T$. On a donc

$$\varphi(A) = \varphi(p(T)) \overset{(3)}{=} p(\varphi(T)) \overset{(*)}{=} p(\psi(T))$$
$$\overset{(3)}{=} \psi(p(T)) = \psi(A).$$

Donc $\varphi = \psi$ sur $\mathcal{P}_T$.

(••) $\varphi = \psi$ sur $\mathcal{A}$?

- φ et ψ sont continues sur $\mathcal{A}$,
- $\varphi = \psi$, sur $\mathcal{P}_T$
- $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{P}_T}$

Donc $\varphi = \psi$. Alors Γ injectif.

(5) On suppose $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{P}_T} = \overline{\mathcal{P}_S}$.

De (1) et (4), on tire Γ bijectif.

Donc $Car(\mathcal{A})$ et $\sigma(T)$ ont le même Cardinal.

De m̂. Comme $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{P}_S}$, alors on tire aussi $Car(\mathcal{A})$ et $\sigma(S)$ ont le même cardinal.

Ce qui montre que $\sigma(T)$ et $\sigma(S)$ ont le même cardinal.