Corrigé de l'examen 2018/2019

Module : ITOLB – AFTO.

Exercice 01 1.a) •) si $x \in \mathcal{B}$: $3x(1) + x(s) \in \mathcal{B}$. Alors $Tx \in$

••) Soient $x, y \in B$, $\alpha \in \mathbb{C}$, on a :

$$T(\alpha x + y)(s) = 3(\alpha x + y)(1) + (x+y)(s)$$

$$= 3\alpha x(1) + 3y(1) + x(s) + y(s)$$

$$= \alpha Tx(s) + Ty(s).$$

Alors T est linéaire de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$.

•••) $\|Tx\| \leq 3|x(1)| + \|x\|$

$$\leq 4\|x\|.$$

Alors T est borné, de plus $\|T\| \leq 4$, mais ces inégalités sont égalités pour $x \equiv 1$. Donc $\|T\| = 4$.

b) Soient $y \in B$ et $\xi \in \mathbb{C}$, on étudie les solutions de l'équation $(T - \xi I)x = y$. Elle s'écrit :

$3x(1) + x(s) - \xi x(s) = y(s)$ i.e : $x(s)(1-\xi) = y(s) -$

Si $\xi = 1$ alors x n'existe que si y est une applicatio constante : $y(s) = 3x(1)$ pour tout $s \in [0,1]$.

• Si $y = c$ alors toute application $x \in \mathcal{B}$ vérifiant $x(1) = c$ resout $(T - I)x = y$. Donc $T - I$ n'est pas injectif.

• Si $\xi \neq 1$ alors $x(s) = \dfrac{y(s) - 3x(1)}{1-\xi}$

et donc $x(1) = \dfrac{y(1) - 3x(1)}{1-\xi}$ i.e $(4-\xi)x(1) =$

si $\xi = 4$ alors $T - 4I$ n'est pas surjectif. Donc $sp(T) = \{1, 4$

2) a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre associé

Puisque $T-\lambda I$ est opérateur normal, alors.

$0 = \|(T-\lambda I)x\| = \|(T-\lambda I)^* x\| = \|(T^* - \bar{\lambda} I)x\|$

donc $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de T^*.

b) d'après a). $\lambda \langle x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle$

$= \langle x, T^* y \rangle$

$= \langle x, \bar{\mu} y \rangle$

$= \mu \langle x, y \rangle$.

donc $\lambda \neq \mu$ implique $\langle x, y \rangle = 0$.

Exercice 02: 1) l'existence: Soient $u = \frac{T+T^*}{2}$

$V = \frac{T-T^*}{2i}$ Il est clair que $u^* = u$, $V^* = V$.

et que $T^* = -2iV + T$ Alors $u = \frac{T - 2iV + T}{2}$.

$= T - iV$.

d'où $T = u + iV$.

..) l'unicité: on suppose que $T = u + iV$

$T = u' + iV'$

$u, u', V, V' \in \mathcal{L}(H)$ des opérateurs autoadjoints

$\begin{cases} u + iV = u' + iV' \\ u - iV = u' - iV' \end{cases}$ i.e $\begin{cases} (u-u') + i(V-V') = 0 \\ (u-u') - i(V-V') = 0 \end{cases}$

d'où $u - u' = 0$ et $V - V' = 0$ i.e: $u' = u'$ et $V = V'$!

2) on a : $\|Tx\|^2 = \|Ux + iVx\|^2$

$$= \|Ux\|^2 + \|Vx\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(i\langle Ux, Vx$$

$$\|T^*x\|^2 = \|Ux - iVx\|^2$$

$$= \|Ux\|^2 + \|Vx\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(i\langle Ux, Vx$$

$$\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(i\langle Ux, Vx\rangle) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \|Tx\|^2 = \|Ux\|^2 + \|Vx$$

$$\mathrm{Re}(i\langle Ux, Vx\rangle) = 0 \Leftrightarrow \langle Ux, Vx\rangle \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow UV = (VU)^* = VU$$

3) $T^*T = TT^* \Leftrightarrow (U+iV)^*(U+iV) = (U+iV)^*(U+$

$$\Leftrightarrow U^2 + i(UV - VU) + V^2$$

$$= U^2 + i(VU - UV) + V^2$$

$$\Leftrightarrow UV - VU = VU - UV$$

$$\Leftrightarrow UV = VU.$$

3) $T^* = T \Leftrightarrow U - iV = U + iV$

$$\Leftrightarrow V = 0.$$

Exercice 04 : 1) Puisque A est normal.

$$(A^2)^* A^2 = A^*A^*AA = A^*AA^*A = AA^*AA^* = AAA^*A.$$

$$= A^2 (A^2)^*.$$

donc A^2 est normal.

2) Puisque A est normal, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$ et donc :

$$\rho(A) = \lim \|A^n\|^{1/n} = \lim \|A^{2^k}\|^{1/2^k} = \|A\|.$$