Correction contrôle continu

Optimisation

MASTER II. M.A

Ex1 (6P) On suppose que $(\bar{x},\bar{y})$ solution de (P) et que $\bar{x} \notin \{1,2\}$ et $\bar{y} \notin \{1,2\}$

$\Longrightarrow$ (d'après K.KT) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ et $\nabla f(\bar{x},\bar{y})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

donc $\begin{cases}2\bar{x}+2\alpha\bar{y}=0\\2\bar{y}+2\alpha\bar{x}=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\bar{x}+\alpha\bar{y}=0\\\bar{y}+\alpha\bar{x}=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix}(1+\alpha)(\bar{x}+\bar{y})=0\\(1-\alpha)(\bar{x}-\bar{y})=0\end{matrix}$

$\Longrightarrow (\bar{x},\bar{y})=(0,0) \quad (\alpha \neq \mp 1)$

or $(\bar{x},\bar{y})=(0,0) \notin \Omega$ n'est pas une solution

donc on a: $\bar{x}\in\{1,2\}$ ou $\bar{y}\in\{1,2\}$

Ex2 (11) 1) (2) $g(x)=x_1^2+x_2^2-x_3$, $\nabla g(x)=\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\\-1\end{pmatrix}$ $H[g]=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ S.D.P

(3P) 2) $\exists \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in C \neq \emptyset$, $C=\{x\in\mathbb{R}^3 / g(x)\leq 0\}$ avec g convexe $\xRightarrow{\text{Sous-niveau}}$ C convexe.

$C=g^{-1}(]-\infty,0])$ avec g continue $\Longrightarrow C$ fermé

(2P) 3) (P) $\Longleftrightarrow \min\limits_{x\in C} f(x)=\frac{1}{2}\langle Ix,x\rangle-\langle y,x\rangle+\frac{1}{2}\|y\|_2^2 = f(x^*)?$

(P) $\Longleftrightarrow$ La projection orthogonale de y sur C

4) si $y=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (P) $\Longleftrightarrow \min\limits_{x\in C} f(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-x_1-x_2+1$ (1) (P)

(4P) d'après KKT $x^*=\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{pmatrix}$ solution $\Longleftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}_+$: $\begin{cases}x_1^*-1+2\lambda x_1^*=0\\x_2^*-1+2\lambda x_2^*=0\\x_3^*-\lambda=0\\\lambda(x_1^{*2}+x_2^{*2}-x_3^*)=0\\\lambda\geq 0\end{cases}$

(1)

1) g non active $\Longrightarrow \lambda=0$ et $x^*=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\notin C$

2) g active $\Longrightarrow \begin{cases}x_1^*=x_2^*=\frac{1}{1+2\lambda}\\x_3^*=\lambda\\\frac{2}{(1+2\lambda)^2}-\lambda=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{matrix}x_1^*=x_2^*=\frac{1}{1+2\lambda}\\x_3^*=\lambda\\\lambda(1+2\lambda)^2=2\end{matrix} \Longrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$ (2) solution

et $x^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in C$ solution