Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \Master 2, AFTOL \Année 2018-2019.

Correction de l'examen Final
Inverses Généralisés

Exercice 1. (1) *Comme $A^*P = PA^*$ et $P = P^*$, alors on obtient que $AP = PA$. Ceci implique que $AA^*P = PAA^*$. Et comme AA^* est un EP opérateur alors il est Groupe inversible, donc $(AA^*)^\# P = P(AA^*)^\#$.*
Par conséquent $(AA^*)^+P = P(AA^*)^+$, car $(AA^*)^\# = (AA^*)^+$. De même on montre que $(B^*B)^+P = P(B^*B)^+$.

2) *Puisque $A^+ = A^*(AA^*)^+$ et $B^+ = B^*(BB^*)^+$, alors par l'application de la question (1), on obtient $A^+P = PA^+$ et $B^+P = PB^+$.*

(3) *On a :*
$APA^+PAP = AA^+AP = AP$;
$A^+PAPA^+P = A^+AA^+P = A^+P$,
$(APA^+P)^* = (AA^+P)^* = PAA^+ = APA^+P$;
$(A^+PAP)^* = A^+AP = A^+PAP$.
Donc $(AP)^+ = A^+P$. De même on trouve et $(B(I-P))^+ = B^+(I-P)$.

Exercice 2. (1) *Voir le cours.*

(2) *a) Supposons que A est groupe inversible. Posons*

$$A^\# = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A),$$

Puisque $AA^\# = A^\# A$, $AA^\# A = A$ et $A^\# AA^\# = A^\#$, alors il vient :
$B_1A_1 = A_1B_1$
$A_1B_1A_1 = A_1$
$B_1A_1B_1 = B_1$
Par conséquent A_1 est groupe inversible. Donc $ind(A_1) \leq 1$.
D'autre part, A_1 est injectif car si $A_1(x) = 0$, alors $x \in N(A) \bigcap Im(^*) = \{0\}$ et donc $x = 0$.
Donc on conclut que $ind(A_1) = 0$. D'òu A_1 inversible. où $C = A_1^*A_1 + A_3^*A_3$ inversible dans $R(A^*)$.
b) Il suffit de vérifier les trois égalités du groupe inverse.
c) Supposons que A normal, alors $AA^\# A^* = A^\# AA^* = A^\# A^*A$.
Inversement. Si $AA^\# A^* = A^\# A^*A$, de (a) et (b) on obtient $A_3^* = 0$ et $A_1^{-1}C = A_1^*$. Donc $A_3 = 0$. Alors on en déduit que $A_1^{-1}A_1^*A_1 = A_1^*$. D'òu $A_1A_1^* = A_1^*A$ et donc A normal.
d) Si A est auto-adjoint, alors $AA^+ = A^+A$ et $A^+ = A^\#$. Donc $A^*A^+A^\# = A^+AA^+ = A^+$.
Réciproquement. On a :

$$A^+ = \begin{bmatrix} C^{-1}A_1^* & C^{-1}A_3^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus N(A) \longrightarrow R(A^*) \oplus N(A),$$

Comme $A^*A^+A^\# = A^+$. *alors on obtient de (1) et (2),* $A_3 = 0$ *et* $A_1^*C^{-1}A_1^*A_1^{-1} = C^{-1}A_1^*$. *Donc* $A_1 = A_1^*$ *car* $C = A_1^*A_1$. *D'òu* A *est auto-adjoint.*

Exercice 3. (1) *Supposons que* A *admet un inverse de Drazin d'ordre* k. *Alors on a :*
$CAC^{-1}CA^DC^{-1} = CAA^DC^{-1} = CA^DAC^{-1} = CA^DC^{-1}CAC^{-1}$;
$CA^DC^{-1}CAC^{-1}CA^DC^{-1} = CA^DAA^DC^{-1} = CA^DC^{-1}$;
$(CAC^{-1})^{k+1}CA^DC^{-1} = CA^{k+1}C^{-1}CA^DC^{-1} = CA^{k+1}A^DC^{-1} = CA^kC^{-1} = (CAC^{-1})^k$.
Donc CA^DC^{-1} *est l'inverse de Drazin de* CAC^{-1} *d'ordre* k.

(2) *On a* $R(CAC^{-1}) = CAR(C^{-1}) = CA(H) = R(CA)$.
Montrons que $N(AC^{-1}) = N(CAC^{-1})$. *Il est clair que* $N(AC^{-1}) \subset N(CAC^{-1})$.
Réciproquement. Si $x \in N(CAC^{-1})$, *alors* $CAC^{-1}(x) = 0$ *et comme* C *inversible ,* *alors* $AC^{-1}(x) = 0$.

(3) *Supposons que si* CAC^{-1} *est Drazin inversible d'ordre* k. *Posons* $(CAC^{-1})^D = B$. *Donc on a :*
$C^{-1}BCA = C^{-1}BCAC^{-1}C = C^{-1}CAC^{-1}BC = AC^{-1}BC$;
$C^{-1}BCAC^{-1}BC = C^{-1}BC$;
$A^{k+1}C^{-1}BC = C^{-1}CA^{k+1}C^{-1}BC = C^{-1}(CAC^{-1})^{k+1}BC = C^{-1}(CAC^{-1})^kC = C^{-1}CA^kC^{-1}C = A^k$.
Donc $A^D = C^{-1}BC$.

Exercice 4. (1) *Puisque* A^D *est Drazin inversible, alors il existe une projection* $P = I - A^D(A^D)^D = I - AA^D$ *vérifiant :*

$$A^D + P \text{ inversible et } A = (A^D + P)^{-1}(I - P).$$

(2) *Donc* $PA = (I - AA^D)A = A - A = 0$.

(3) *De (2) on déduit que* $R(A) \subset N(P) = R(A^k)$. *Donc* $R(A) = R(A^k)$ *et ceci implique que* $d(A) \leq 1$. *Par conséquent* $ind(A) \leq 1$.