Université Batna 2 -- Faculté MI -- Département de Mathématiques
Interrogation(1) en Analyse Numérique 1 -- 2ème année Licence.
Mercredi 28/11/ 2018

Exercice :(06 pts) TD

1) Calculer l'interpolant P_2 de la fonction $f(x) = \cos(x)$ en les points $x_i = \frac{\pi}{2} i$, avec $i = 0,1,2$.
2) Soit P_3 l'interpolant de la même fonction en les points $x_i = \frac{\pi}{2} i$, avec $i = 0,1,2,3$.
   a) Y'a-t-il une relation entre P_2 et P_3 ? Est-elle généralisable ?
   b) Calculer P_3.
   c) Soit $E_t(x)$ l'erreur théorique au point x. estimer $E_t(\pi)$ et $E_t(\frac{\pi}{3})$.

Correction interrogation 01

1) On choisit la méthode de NEWTON car elle permet d'utiliser les calculs de la question 1) pour répondre à la question 2).

Calculons l'interpolant de Newton p_2. On commence par construire le tableau des différences divisées :

i	x_i	$f(x_i)$	Différence d'ordre 1	Différence d'ordre 2
0	0	1		
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$f[x_0, x_1] = -\frac{2}{\pi}$	
2	π	-1	$f[x_1, x_2] = -\frac{2}{\pi}$	$f[x_0, x_1, x_2] = 0$

$(\mathbf{0.50}\boldsymbol{pt})$ $(\mathbf{0.50}\boldsymbol{pt}) + (\mathbf{0.50}\boldsymbol{pt})$ $(\mathbf{0.50}\boldsymbol{pt})$

On a alors, $p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$, **(0. 5pt)**

Donc $p_2(x) = 1 - \frac{2}{\pi} x$. $(\mathbf{0.5}\boldsymbol{pt})$

2) a) Oui, il ya une relation entre P_2 et P_3 : $p_3(x) = p_2(x) + D_3 . N_3(x)$ dans la formule de Newton $(\mathbf{0.5}\boldsymbol{pt})$ et elle est généralisable : $p_{n+1}(x) = p_n(x) + D_{n+1} . N_{n+1}(x)$ pour tout $n \geq 0$ $(\mathbf{0.5}\boldsymbol{pt})$

b) Pour calculer l'interpolant p_3, il suffit de calculer une différence divisée en plus, *i.e.* ajouter une ligne au tableau précédant. Alors

i	x_i	$f(x_i)$	Différence d'ordre 1	Différence d'ordre 2	Différence d'ordre 3
0	0	1			
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$f[x_0, x_1] = -\frac{2}{\pi}$		
2	π	-1	$f[x_1, x_2] = -\frac{2}{\pi}$	$f[x_0, x_1, x_2] = 0$	
3	$\frac{3\pi}{2}$	0	$f[x_2, x_3] = \frac{2}{\pi}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{4}{\pi^2}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{8}{3\pi^3}$

$(\mathbf{0.25}\boldsymbol{pt})$ $(\mathbf{0.25}\boldsymbol{pt})$ $(\mathbf{0.25}\boldsymbol{pt})$

$p_3(x) = p_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

Donc, $p_3(x) = 1 - \frac{2}{3\pi} x - \frac{4}{\pi^2} x^2 + \frac{8}{3\pi^3} x^3$. $(\mathbf{0.25}\boldsymbol{pt})$**.**

d) $E_t(\pi) = 0$ car $x_2 = \pi$ est un neoud. $(\mathbf{0.5}\boldsymbol{pt})$**.**

$E_t(\frac{\pi}{3}) = f\,(\frac{\pi}{3})$ - $p_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - p_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ - $(1 - \frac{2}{3\pi}\frac{\pi}{3} - \frac{4}{\pi^2}(\frac{\pi}{3})^2 + \frac{8}{3\pi^3}(\frac{\pi}{3})^3) = \frac{11}{162}$. $(\mathbf{0.5}\boldsymbol{pt})$**.**