Université Batna 2 -- Faculté MI -- Département de Mathématiques

Interrogation(2) en Analyse Numérique 1 -- 2ème année Licence.

Mercredi 16/12/ 2018

Exercice (06 pts) : Soient les polynômes de Tchebychev définis par :

$$\boldsymbol{T_n(x) = cos(n.\,arc\,cos(x))} \text{ pour tout } \boldsymbol{x} \in [-1, 1] \text{ et } n \geq 0.$$

1) Déterminer $\boldsymbol{T_0(x), T_1(x)}$ **et** $\boldsymbol{T_2(x)}$.
2) En utilisant la base $\{1, x, 2x^2 - 1\}$, Trouver le polynôme p* qui réalise le minimum suivant :

$$\boldsymbol{min}_{p \in \mathbb{P}_2[x]} \left(\int_{-1}^{1} (p(x) - x^3)^2\, dx \right).$$

Correction interrogation 02

1) Détermination de $\boldsymbol{T_0(x), T_1(x)}$ **et** $\boldsymbol{T_2(x)}$:

$\boldsymbol{T_0(x) = cos(0) = 1.}$ $\quad \boldsymbol{T_1(x) = cos\big(arc\,cos(x)\big) = x.}$ $\quad \boldsymbol{(0.50pt) + (0.50pt)}$

$\boldsymbol{T_2(x) = cos\big(2.\,arc\,cos(x)\big) = 2\ \Big(cos^{\,2}\big(arc\,cos(x)\big)\Big) - 1} = 2x^2 - 1.$ $\quad \boldsymbol{(01pt)}$

2) Détermination de p* :

<u>**Soit**</u> p* le polynôme qui réalise le minimum $\boldsymbol{min}_{p \in \mathbb{P}_2[x]} \left(\int_{-1}^{1} (p(x) - x^3)^2\, dx \right)$.

<u>**Donc**</u> p* $\in \mathbb{P}_2[x]$ est M.A.S.M.C Continue de la fonction $f(x) = x^3$ pour tout $\boldsymbol{x} \in [-1, 1]$

En utilisant la base $\{1, x, 2x^2 - 1\}$:

<u>**On pose**</u> p*$(x) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1)$, $\quad \boldsymbol{(0.50pt)}$

<u>**On obtient**</u>

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1, 2x^2-1\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x, 2x^2-1\rangle \\ \langle 2x^2-1,1\rangle & \langle 2x^2-1,x\rangle & \langle 2x^2-1, 2x^2-1\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f,1\rangle \\ \langle f,x\rangle \\ \langle f, 2x^2-1\rangle \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{(0.50pt)}$$

$\langle 1,1\rangle = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{1\, dx = 2,}\ \langle 1,x\rangle = \langle x,1\rangle = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{x\, dx = 0,}\ \langle x,x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\, \boldsymbol{dx} = \frac{2}{3}.$ $\quad \boldsymbol{(0.25pt)}$

$\langle 1, 2x^2-1\rangle = \langle 2x^2-1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} (2x^2-1)\, \boldsymbol{dx} = -\frac{2}{3}.$ $\quad \boldsymbol{(0.25pt)}$

$\langle x, 2x^2-1\rangle = \langle 2x^2-1, x\rangle = \int_{-1}^{1} (2x^3 - x)\, \boldsymbol{dx = 0}.$ $\quad \boldsymbol{(0.25pt)}$

$\langle 2x^2-1, 2x^2-1\rangle = \int_{-1}^{1} (2x^2-1)^{\,2}\, \boldsymbol{dx} = \int_{-1}^{1} (4x^4 - 4x^2 + 1)\, \boldsymbol{dx} = \frac{14}{15}$ $\quad \boldsymbol{(0.25pt)}$

$\langle f,1\rangle = \langle x^3, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\, \boldsymbol{dx = 0,}\ \langle f,x\rangle = \langle x^3, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^4\, \boldsymbol{dx} = \frac{2}{5},$ $\quad \boldsymbol{(0.25pt)}$

$\langle f, 2x^2-1\rangle = \langle x^3, 2x^2-1\rangle = \int_{-1}^{1} (2x^5 - x^3)\, \boldsymbol{dx = 0}.$ $\quad \boldsymbol{(0.25pt)}$

<u>**Le système précédent devient**</u> :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{14}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_0 - \frac{2}{3}\, a_2 = 0 \\ \frac{2}{3}\, a_1 = \frac{2}{5} \\ \frac{-2}{3} a_0 + \frac{14}{15}\, a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{3}{5} \\ a_2 = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{(01pt)}$$

<u>**Donc**</u> p* est M.A.S.M.C Continue de la fonction $f(x) = x^3$ telle que :

$$\text{p*}(x) = \frac{3}{5} x. \quad \boldsymbol{(0.50pt)}$$