Université Mustapha Ben Boulaid - Batna 2
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Corrigé Type de l'Examen Final d'algèbre 4

25 Octobre 2020

Exercice 1 *Soient $f,g:\mathbb{R}^2\to R$ deux formes linéaires vérifiant :*

$$f(1,2)=f(2,1)=3 \quad et \quad g(1,2)=-g(2,1)=-1$$

1. *Donner l'expression canonique d'une forme linéaire définit de $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.*
   Une forme linéaire de $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est donnée par : $(x,y)\mapsto \alpha x+\beta y \;\; ; \;\; \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **(2pts)**
2. *Déterminer les deux formes linéaires f et g.*
   - **Par définition,** $f(x,y)=\alpha x+\beta y$ **et on a** $\begin{cases}\alpha+2\beta=3\\ 2\alpha+\beta=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\end{cases}$ **donc** $f(x,y)=x+y$.**(1pts)**
   - **Par définition** $g(x,y)=\alpha x+\beta y$ **et on a** $\begin{cases}\alpha+2\beta=-1\\ 2\alpha+\beta=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-1\end{cases}$ **donc** $g(x,y)=x-y$. **(1pts)**
3. *Montrer que $\mathcal{B}=\{f,g\}$ est une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.*
   Déjà on sais que $\dim(\mathbb{R}^2)^*=\dim\mathbb{R}^2=2$**, Donc il suffit de montrer que** $\mathcal{B}=\{f,g\}$ **est libre. Soit** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **tels que**

$$\begin{aligned}\alpha f_1(x,y)+\beta f_2(x,y)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha(x+y)+\beta(x-y)\\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=0\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad \alpha=\beta=0.\end{aligned}$$

   alors la famille $\mathcal{B}=\{f,g\}$ **est libre maximale dans** $(\mathbb{R}^2)^*$ **, donc c'est une base. (2pts)**
4. *Exprimer les formes linéaires suivantes dans $\mathcal{B}$*

$$h(x,y)=y \quad , \quad k(x,y)=-x \quad , \quad t(x,y)=3x-5y \quad , \quad s(x,y)=2x+8y.$$

   - **Soient** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **tels que** $h(x,y)=\alpha f_1(x,y)+\beta f_2(x,y)=(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=-y$ **donc**

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\beta\\ 2\beta=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{2}\\ \beta=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow h(x,y)=-\frac{1}{2}f_1(x,y)+\frac{1}{2}f_2(x,y).(1pts)$$

   - **Soient** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **tels que** $k(x,y)=\alpha f_1(x,y)+\beta f_2(x,y)=(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=-x$ **donc**

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \alpha-\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\\ 2\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{2}\\ \beta=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow k(x,y)=-\frac{1}{2}f_1(x,y)-\frac{1}{2}f_2(x,y).(1pts)$$

   - **Soient** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **tels que** $t(x,y)=\alpha f_1(x,y)+\beta f_2(x,y)=(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=3x-5y$ **donc**

$$\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha-\beta=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=3-\beta\\ 2\beta=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=4\end{cases}\Rightarrow t(x,y)=-f_1(x,y)+4f_2(x,y).(1pts)$$

   - **Soient** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **tels que** $s(x,y)=\alpha f_1(x,y)+\beta f_2(x,y)=(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=2x+8y$ **donc**

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha-\beta=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2-\beta\\ 2\beta=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=5\\ \beta=-3\end{cases}\Rightarrow s(x,y)=5f_1(x,y)-3f_2(x,y).(1pts)$$

Exercice 2

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, on pose

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y - 3z = 0\}$$

1. *Justifier que F est un hyperplan.*
   - **On remarque que $(1, 1, 1) \in F$ donc F ,n'est pas réduit en $\{0\}$. (1pts)**
   - **L'application $f(x, y, z) = x + 2y - 3z$ est bien une forme linéaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ car elle est sous la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z$ avec $\alpha = 1, \beta = 2$ et $\gamma = -3$. (1pts)**
   - **Par définition $\ker f = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y - 3z = 0\} = F$. (1pts)**
     Donc F est bien un hyperplan sur $\mathbb{R}^2$.
2. *En déduire sa dimension.*
   On sais qu'un hyperplan est toujours co-dimensionnel avec la droite vectoriel, donc
   $$\dim F = \dim E - 1 = 3 - 1 = 2.(1pts)$$
3. *Donner une base de F.*
   Si $(x, y, z) \in F \Rightarrow x + 2y - 3z = 0 \Rightarrow x = -2y + 3z$, donc
   $$\forall (x, y, z) \in F, \quad (x, y, z) = (-2y + 3z, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(3, 0, 1)$$
   donc on peut prendre comme base $\{(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ (2pts)
4. *Donner un supplémentaire H Pour F.*
   Un supplémentaire pour F sera un sous espace vectoriel engendré par un vecteur de E qui n'est pas dans F, autrement dit un vecteur $v(x, y, z)$ tel que $x + 2y - 3z \neq 0$.
   On peut prendre par exemple $H = vect\langle(1, 1, 0)\rangle$. (2pts)
5. *Soit*
   $$G = \{(x, y, z) \in E \mid 2x + 4y - 6z = 0\}.$$
   Quel est le liens entre G et H (Justifier) .
   G est un hyperplan dont l'équation est $2x + 4y - 6z = 0$ qui est proportionnelle avec l'équation $x + 2y - 3z = 0$ de l'hyperplan F et on sait que deux formes linéaires proportionnelles ont le même noyau ce qui montre que $G = F$.
   Donc G et H sont supplémentaires! (2pts)