29.01.2019 *Énoncé et Corrigé.*

Le Chargé de la Matière
Mokrane A.Z.

[1]

Exercice 1.

1. Soit $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ une distribution sur $\mathbb{R}$. Quelle est la caractérisation de $\operatorname{supp} u$, le support de u ?
   Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$. Prouver que $< u, \varphi >= 0$.
2. Soit $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} u = \{0\}$. Soit $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$0 \le \psi(x) \le 1, \qquad \big(\psi(x) = 1 \quad \text{si} \quad |x| \le \frac{1}{2}\big) \quad \text{et} \quad \big(\psi(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \ge 1\big).$$
   Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\psi_n(x) = \psi(nx)$. Déterminer les propriétés de la fonction ψ_n.
   Prouver que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$< u, \varphi >=< u, \varphi.\psi_n > .$$
   En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$|< u, \varphi >| \le C \max_{0 \le k \le m} \big(\sup_{|x| \le \frac{1}{n}} |(\frac{d}{dx})^k (\varphi.\psi_n)(x)|\big) = C p_{K_n,m}(\varphi.\psi_n). \tag{1}$$
   où $K_n := [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
3. On considère maintenant une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vérifiant l'hypothèse (H) suivante :
   $$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \cdots = \varphi^{(m)}(0) = 0. \qquad (H)$$
   (1) Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $0 \le l \le m$. En appliquant la formule de Taylor à la fonction $(\frac{d}{dx})^l \varphi = \varphi^{(l)}$ au point $x = 0$ jusqu'à l'ordre $m + 1 - l$, prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \le \frac{1}{n}$ on a
   $$|\varphi^{(l)}(x)| \le \frac{1}{n^{m+1-l}} \big(\sup_{|x| \le \frac{1}{n}} |(\frac{d}{dx})^{m+1-l}(\varphi)(x)|\big). \tag{3}$$
   (2) En appliquant la formule de Leibniz dans l'expression (1), prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tel que $0 \le k \le m$, il existe une constant $C_k > 0$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$\sup_{|x| \le \frac{1}{n}} |(\frac{d}{dx})^k (\varphi.\psi_n)(x)| \le \frac{C_k}{n} p_{K_1,m}(\varphi) p_{K_1,m}(\psi).$$
   (3) En déduire que si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vérifie l'hypothèse (H) alors $< u, \varphi >= 0$
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ posons $M_k(x) = x^k$. Soit $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.
   (1) En appliquant la formule de Taylor à la fonction ϕ au point $x = 0$ jusqu'à l'ordre $m + 1$, prouver que la fonction
   $$g = \phi - \sum_{k=0}^{m} \frac{M_k}{k!}.\phi^{(k)}(0),$$
   vérifie l'hypothèse (H). Prouver également que la fonction $\psi.g$ vérifie aussi l'hypothèse (H).
   (2) En déduire que
   $$< u, \phi >=< u, \psi.g > + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} < u, M_k.\psi > \phi^{(k)}(0).$$

1. *Barème de Notation sur 20 points* :
1. :*3 points*-2.(1) : *1 point*, 2.(2) : *2 points*, 2.(3) : *2 points*, 3.(1) : *2 points*, 3.(2) : *2 points*, 3.(3) : *2 point*, 4.(1) : *2 points*, 4.(2) : *1 point*, 4.(3) : *3 points*.

(3) Prouver que

$$u = \sum_{k=0}^{m} a_k \delta^{(k)} \quad (\mathscr{D}'(\mathbb{R})),$$

où $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k!} < u, M_k.\psi > \in \mathbb{C}$ et $\delta^{(k)}$ désigne la dérivées (au sens des distributions) d'ordre k de la distribution de Dirac δ en 0.

1. Soit $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Soit V une partie ouverte de $\mathbb{R}$. On rappelle que la distribution u s'annule sur V si pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset V$, on ait $< u, \varphi >= 0$. Le support de u est la partie complémentaire de l'ouvert d'annulation de u, qui est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ où la distribution u s'annule . Le support de u est donc une partie fermée de $\mathbb{R}$ caractérisée par

$$\begin{cases} x \notin \operatorname{supp} u & \Leftrightarrow \quad \exists\, V \in \mathscr{V}(x) \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \quad \operatorname{supp} u \subset V \quad < u, \varphi >= 0, \\ x \in \operatorname{supp} u & \Leftrightarrow \quad \forall\, V \in \mathscr{V}(x) \quad \exists\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \quad \operatorname{supp} u \subset V \quad < u, \varphi >\neq 0. \end{cases}$$

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$. Posons $V = (\operatorname{supp} u)^c$. La partie V est donc l'ouvert d'annulation de la distribution u. La distribution u s'annule sur V. Donc, comme $\operatorname{supp} \varphi \subset V$, par définition $< u, \varphi >= 0$.

2. (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\psi_n = \sigma_n \psi$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}$. En outre, $\operatorname{supp} \psi_n = \frac{1}{n} \operatorname{supp} \psi \subset \frac{1}{n} \bar{B}(0,1) = \bar{B}(0, \frac{1}{n}) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] = K_n$, donc $\psi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. On a en plus

$$0 \le \psi_n(x) \le 1, \qquad \big(\psi_n(x) = 1 \quad \text{si} \quad |x| \le \frac{1}{2n}\big) \quad \text{et} \quad \big(\psi_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \ge \frac{1}{n}\big). \tag{4}$$

(2) Soit $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tell que $\operatorname{supp} u = \{0\}$ et soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ écrivons $\varphi = \varphi.\psi_n + \varphi.(1 - \psi_n)$. Les deux fonctions $\varphi.\psi_n$ et $\varphi.(1 - \psi).\varphi$ sont dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ puisque $\operatorname{supp}(\varphi.\psi_n) \subset \operatorname{supp} \varphi$ et $\operatorname{supp}(\varphi.(1 - \psi_n) \subset \operatorname{supp} \varphi$. Par linéarité de la distribution u on a

$$< u, \varphi >=< u, \varphi.\psi_n > + < u, \varphi.(1 - \psi_n) > .$$

Observons que $\varphi.(1 - \psi_n) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp} \varphi.(1 - \psi_n) \subset \operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp}(1 - \psi_n) \subset \operatorname{supp}(1 - \psi_n)$.
Observons également que pour tout $x \in]-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}[$ on a $1 - \psi_n(x) = 0$, et que $0 \in]-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}[$, donc $0 \notin \operatorname{supp}(1 - \psi_n)$, on en déduit que $0 \notin \operatorname{supp} \varphi.(1 - \psi_n)$.
Cela entraîne que $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi.(1 - \operatorname{supp} \psi_n) = \{0\} \cap \operatorname{supp} \varphi.(1 - \operatorname{supp} \psi_n) = \emptyset$. et par la question 1. on en déduit que $< u, \varphi.(1 - \psi_n) >= 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $< u, \varphi >=< u\varphi.\psi_n >$.
Pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ quelconque, on a que pour tout $n \ge 1$ $\operatorname{supp}(\varphi\psi_n) \subset \operatorname{supp} \psi_n \subset K_n \subset K_1 = [-1, +1]$. Par la continuité de la distribution u au sens de la topologie de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, on sait *en considérant le compact* K_1 qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ (dépendant de K_1) et $C > 0$ (dépendant de K_1) mais *indépendants de* n tels que si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ alors pour tout $n \ge 1$ la fonction $\varphi\psi_n$ est telle que $\operatorname{supp}(\varphi\psi_n) \subset K_1$ et donc

$$|< u, \varphi >| = |< u, \varphi.\psi_n >| \le C p_{K_1,m}(\varphi.\psi_n).$$

Or , pour tout $k \in \mathbb{N}$ on sait que $\operatorname{supp}(\varphi.\psi_n)^{(k)} \subset \operatorname{supp}(\varphi.\psi_n) \subset K_n$, et comme

$$K_1 = [-1, +1] = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| \le \frac{1}{n}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \colon \frac{1}{n} < |x| \le 1\},$$

alors pour tout $x \in K_1$ tel que $\frac{1}{n} < |x| \le 1$, on a $(\varphi.\psi_n)^{(k)}(x) = 0$.
La borne supérieure $\sup\limits_{x \in K_1} |(\varphi.\psi_n)^{(k)}(x)|$ est atteinte uniquement dans K_n, donc

$$\sup_{x \in K_1} |(\varphi.\psi_n)^{(k)}(x)| = \sup_{x \in K_n} |(\varphi.\psi_n)^{(k)}(x)|,$$

On en déduit que $p_{K_1,m}(\varphi.\psi_n) = p_{K_n,m}(\varphi.\psi_n)$.

3. On considère maintenant une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vérifiant l'hypothèse (H) suivante : $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad 0 \le k \le m \qquad \varphi^{(k)}(0) = 0$.

(1) Soit $0 \le l \le m$. Écrivons la formule de Taylor pour la fonction $\varphi_l := \varphi^{(l)}$. au point $x = 0$ à l'ordre $m + 1 - l$ pour $x \in K_n$:

$$\begin{aligned} \varphi^{(l)}(x) = \varphi_l(x) &= \sum_{p=0}^{m-l} \frac{x^p}{p!} \varphi_l^{(p)}(0) + \frac{x^{m+1-l}}{(m-l)!} \int_0^1 (1-t)^m \varphi_l^{(m+1-l)}(tx) dt \\ &= \sum_{p=0}^{m-l} \frac{x^p}{p!} \varphi^{(l+p)}(0) + \frac{x^{m+1-l}}{(m-l)!} \int_0^1 (1-t)^m \varphi^{(m+1-l+l)}(tx) dt \end{aligned} \tag{5}$$

Or pour tout $p \in \{0, \cdots, m-l\}$ nous avons $0 \leq l \leq l+p \leq m$, et donc, en vertu de l'hypothèse (H), $\varphi^{(l+p)}(0) = 0$. En revenant à l'expression (5) la somme du terme de droite s'annule et on obtient pour $x \in K_n$

$$\varphi^{(l)}(x) = \frac{x^{m+1-l}}{(m-l)!} \int_0^1 (1-t)^m \varphi^{(m+1)}(tx)dt.$$

Comme la fonction $\varphi^{(m+1)}$ est continue et bornée sur le compact $K_n = [-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}]$, pour tout $t \in [0,1]$ et $x \in K_n$ nous avons $|tx| \leq |x| \leq \frac{1}{n} \leq 1$ alors $|\varphi^{(m+1)}(tx)| \leq \sup_{y \in K_n} |\varphi^{m+1}(y)| \leq \sup_{y \in K_1} |\varphi^{m+1}(y)| \leq p_{K_1,m+1}(\varphi)$, et

(6)

$$|\varphi^{(l)}(x)| \leq \frac{|x|^{m+1-l}}{(m-l)!} \int_0^1 (1-t)^m |\varphi^{(m+1)}(tx)|dt \leq \frac{1}{n^{m+1-l}} (\frac{1}{(m-l)!} \int_0^1 (1-t)^m dt) \sup_{y \in K_n} |\varphi^{m+1}(y)| \leq \frac{1}{n^{m+1-l}} p_{K_1,m+1}(\varphi).$$

(2) Soit $k \in \{0, \cdots, m\}$ et $x \in K_n$. En appliquant la règle de Leibniz à la fonction $(\varphi.\psi_n)^{(k)}$ en x on a $(\varphi.\psi_n)^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \varphi^{(l)}(x) \psi_n^{(k-l)}(x)$. Or, les dérivées d'ordre l de la fonction ψ_n en x sont de la forme $\psi_n^{(l)}(x) = n^l \psi^{(l)}(nx)$, et sachant que $\operatorname{supp} \psi \subset K_1$, on a pour $x \in K_n$, $nx \in K_1$ et

$$|\psi_n^{(k-l)}(x)| = n^{k-l} |\psi^{(k-l)}(nx)| \leq n^{k-l} \sup_{y \in K_1} |\psi^{(k-l)}(y)| \leq \max_{0 \leq k \leq m} \big(\sup_{y \in K_1} |\psi^{(k)}(y)| \big) = n^{k-l} p_{K_1,m}(\psi),$$

et en utilisant l'estimation (6) appliquée à (7), en posant $C_1 = \sum_{l=0}^{k} C_k^l > 0$, on obtient que pour tout $x \in K_n$ et $0 \leq k \leq m$

$$|(\varphi.\psi_n)^{(k)}(x)| \leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l \frac{n^{k-l}}{n^{m+1-l}} p_{K_1,m+1}(\varphi) p_{K_1,m}(\psi) \leq \frac{1}{n} (\sum_{l=0}^{k} C_k^l \frac{1}{n^{m-k}}) p_{K_1,m+1}(\varphi) p_{K_1,m}(\psi) \leq \frac{C_1}{n} p_{K_1,m+1}(\varphi) p_{K_1,m}(\psi).$$

Cette quantité est bornée uniformément en $x \in K_n$, et en $k \in \{0, 1, \cdots, m\}$.
En prenant la borne supérieure sur tout les $x \in K_n$ et tout les $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $0 \leq k \leq m$, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_{K_n,m}(\varphi.\psi_n) = \max_{0 \leq k \leq m} \big(\sup_{x \in K_n} |(\varphi.\psi)^{(k)}(x)| \big) \leq \frac{C_1}{n} p_{K_1,m+1}(\varphi) p_{K_1,m}(\psi).$$

(3) En résumé, on a montré que si une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vérifie l'hypothèse (H), en appliquant l'inégalité de continuité de la distribution u, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|< u, \varphi >| = |< u, \varphi.\psi_n >| \leq C p_{K_1,m}(\varphi.\psi_n) = C p_{K_n,m}(\varphi\psi_n) \leq C \frac{C_1}{n} p_{K_1,m+1}(\varphi) p_{K_1,m}(\psi).$$

Le terme de droite de l'inégalité est le terme général d'une suite numérique positive qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, le terme de droite est par contre indépendant de n. Par passage la la limite lorsque $n \to +\infty$ on déduit que $|< u, \varphi >| = 0$ et donc que $< u, \varphi >= 0$.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ posons $M_k(x) = x^k$. Remarquons d'abord que $M_0(0) = 1$ mais $M_k(0) = 0$ si $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

(1) En appliquant la formule de Taylor à la fonction ϕ au point $x = 0$ jusqu'à l'ordre $m+1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \phi^{(k)}(0) + \frac{x^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-t)^m \phi^{(m+1)}(tx)dt.$$

Posons $\chi(x) = \int_0^1 (1-t)^m \phi^{(m+1)}(tx)dt$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}$ puisque $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \phi(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{M_k(x)}{k!}.\phi^{(k)}(0) = \frac{M_{m+1}(x)}{m!} \chi(x).$$

Prouvons que g vérifie l'hypothèse (H). Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 \leq k \leq m$. En utilisant la règle de Leibniz pour la dérivée $k^{\text{ème}}$ du produit de deux fonctions en $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g^{(k)}(x) = \frac{1}{m!} \sum_{l=0}^{k} C_k^l M_{m+1}^{(l)}(x) \chi^{(k-l)}(x).$$

En calculant la dérivée $l^{\text{ème}}$ de la fonction M_{m+1} en x , pour $0 \leq l \leq k \leq m$, on obtient par récurrence

$$M_{m+1}(x) = x^{m+1},\ M'_{m+1}(x) = (m+1)x^m, \cdots,\quad M^{(l)}_{m+1}(x) = (m+1)(m)(m+1-2)\cdots(m+1-l+1)x^{m+1-l}.$$

Pour tout $0 \leq l \leq k \leq m$, on a $m+1-l \geq 1$, alors $M^{(l)}_{m+1}(0) = (m+1)(m)(m+1-2)\cdots(m+1-l+1)0^{m+1-l} = 0$. On en déduit que que dans l'expression de $g^{(k)}(0)$, pour $0 \leq k \leq m$

$$g^{(k)}(0) = \frac{1}{m!}\sum_{l=0}^{k} C_k^l M^{(l)}_{m+1}(0)\chi^{(k-l)}(0) = 0,$$

c'est à dire que la fonction g vérifie l'hypothèse (H).
De même comme $\psi(0) = 1$ on a aussi $(\psi g)(0) = \psi(0)g(0) = 0$ et pour $1 \leq k \leq m$
$(\psi g)^{(k)}(0) = \sum\limits_{k=0}^{k} C_k^l g^{(l)}(0)\psi^{(k-l)}(0) = 0$, c'est à dire que la fonction ψg vérifie l'hypothèse (H).

(2) Soit $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. En appliquant la question 1.(2) avec $n = 1$, on a vu que $< u, \phi >=< u, \psi_1\phi >=< u, \psi\phi >$. Mais on peut écrire $\psi\phi = \psi\big(g + \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}M_k.\phi^{(k)}(0)\big) = \psi g + \sum\limits_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}M_k\psi.\phi^{(k)}(0)$. Remarquons que les fonctions ψg et $\psi.M_k$ sont dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ et donc par linéarité de u,

$$< u, \phi >=< u, \psi\phi >=< u, \psi g > + \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} < u, M_k\psi\phi^{(k)}(0) >=< u, \psi g > + \sum_{k=0}^{m}\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} < u, M_k\psi > .$$

Comme la fonction ψg vérifie l'hypothèse (H), d'après la question 3.(3) on a vu que $< u, \psi g >= 0$ et donc que

$$< u, \phi >= \sum_{k=0}^{m}\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} < u, M_k\psi > .$$

Posons $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k!} < u, M_k\psi > \in \mathbb{C}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq k \leq m$. la suite $(a_k)_{0\leq k\leq m}$ est bien définie dans $\mathbb{C}$ puisque $M_k\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. On a alors $< u, \phi >= \sum\limits_{k=0}^{m} a_k(-1)^k\phi^{(k)}(0)$. En considérant δ, la distribution de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}$ définie par $< \delta, \phi >= \phi(0)$ et utilisant la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la distribution δ, on sait que

$$< \delta^{(k)}, \phi >= (-1)^k < \delta, \phi^{(k)} >= (-1)^k\phi^{(k)}(0),$$

alors pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$< u, \phi >= \sum_{k=0}^{m} a_k < \delta^{(k)}, \phi >=< \sum_{k=0}^{m} a_k\delta^{(k)}, \phi >,$$

ce qui signifie que si $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ est telle que $\operatorname{supp} u = \{0\}$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ et une suite finie $(a_k)_{0\leq k\leq m} \subset \mathbb{C}$ telle que $u = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k\delta^{(k)} \qquad (\mathscr{D}'(\mathbb{R}))$.

Le Chargé de la Matière : Mokrane A.Z. *29.01. 2019*