جامـــعة باتـــنة 2 كـلية الرياضيات والإعـلام الآلـــي قسم الرياضيات

2018.05.27 الإختبار النهائي تحليل فوريه و فضاءات صبولاف السنة الأولى ماستر

Analyse de Fourier et Espaces de Sobolev. ***Durée : 2h 30*** *Chargé de la matière : Ahmed Z. Mokrane*

Examen Final

Exercice 1. 1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Prouver en justifiant rigoureusement vos calculs que

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi$$

2. Soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda > 0$. Prouver que

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) \lambda^d \hat{\varphi}(\lambda\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\frac{x}{\lambda}) \hat{g}(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(\frac{x}{\lambda}) \hat{\varphi}(x) dx.$$

3. En passant à la limite lorsque $\lambda \to +\infty$, montrer en justifiant rigoureusement vos calculs que

$$\frac{g(0)}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(x) dx = \frac{\varphi(0)}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(x) dx.$$

4. En utilisant la fonction φ définie par $\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, prouver que $g(0) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(x) dx$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. En écrivant $g(x) = (\tau_{-x} g)(0)$, où τ_{-x} désigne l'opérateur de translation au point $-x$, prouver que

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<x,\xi>} \hat{g}(x) dx.$$

Corrigé de l'Examen Final

Corrigé de l'exercice 1. (8points). 1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On sait que $\hat{f}, \hat{g} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \big(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<x,\xi>} f(x) dx \big) g(\xi) d\xi.$$

Nous allons utiliser le Théorème de Fubini :*Justification* : Comme on a $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et que $|e^{-i<x,\xi>}| = 1$, en considérant les modules des fonctions nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx) |g(\xi)| d\xi = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < +\infty.$$

Donc on peut intervertir l'ordre de l'intégration

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \big(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<\xi,x>} g(\xi) d\xi \big) f(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{g}(x) dx.$$

2. Soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda > 0$. Notons $\sigma_{\lambda^{-1}}$ l'opérateur de dilatation d'ordre $\frac{1}{\lambda}$ défini pour $x \in \mathbb{R}^d$ par $\sigma_{\lambda^{-1}} \varphi(x) = \varphi(\frac{x}{\lambda})$. Comme $\sigma_{\lambda^{-1}} \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En appliquant le résultat de la première question au produit $\sigma_{\lambda^{-1}} \varphi . \hat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on obtient

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_{\lambda^{-1}} \varphi(x) \hat{g}(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}(\sigma_{\lambda^{-1}} \varphi)(x) g(x) dx.$$

Considérons la transformation $S \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ par $S(y) = \lambda . y$. S est une bijection dans $\mathbb{R}^d$ d'inverse $S^{-1} \colon x \mapsto S^{-1}(x) = \frac{x}{\lambda}$. S et S^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathbb{R}^d$. S est donc un difffféomorphisme dans $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ nous avons

$$J_S(y) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^d > 0.$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$. Évaluons $\mathscr{F}(\sigma_{\lambda^{-1}} \varphi)(\xi)$ en utilisant le théorème du changement de variables relativement à la transformation S :

$$\mathscr{F}(\sigma_{\lambda^{-1}} \varphi)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<x,\xi>} \varphi(\lambda^{-1} x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<S(y),\xi>} \varphi(\lambda^{-1} S(y)) |J_S(y)| dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<\lambda . y,\xi>} \varphi(y) \lambda^d dy = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<y,\lambda . \xi>} \varphi(y) \lambda^d dy = \lambda^d \hat{\varphi}(\lambda\xi).$$

Par conséquent
$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\frac{x}{\lambda})\hat{g}(x)dx=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}g(\xi)\lambda^d\hat{\varphi}(\lambda\xi)d\xi.$$
De même, en utilisant la transformation S^{-1} dans la deuxième intégrale et sachant que pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ on a $J_{S^{-1}}(x)=\lambda^{-d}$, on obtient par le Théorème du changement de variable relativement à la transformation S^{-1} :
$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}g(\xi)\lambda^d\hat{\varphi}(\lambda\xi)d\xi=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}g(S^{-1}(x))\lambda^d\hat{\varphi}(\lambda S^{-1}(x))|J_{S^{-1}}(x)|dx=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}g(\frac{x}{\lambda})\hat{\varphi}(x)dx.$$

3. Nous avons montré que pour tout $\lambda>0$, pour tout $g,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, l'égalité
$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\frac{x}{\lambda})\hat{g}(x)dx=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}g(\frac{x}{\lambda})\hat{\varphi}(x)dx,$$
Les fonctions $g,\hat{\varphi}$ sont dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, en particulier nous avons pour tout $x\in\mathbb{R}^d$:
$$|\hat{\varphi}(\frac{1}{\lambda}.x)-\hat{\varphi}(0)|\leq\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^d|x|\int_0^1|\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x_j}(\frac{t}{\lambda}x)|dt\leq\frac{1}{\lambda}p_1(\hat{\varphi})\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{}0,$$
$$|g(\frac{1}{\lambda}.x)-g(0)|\leq\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^d|x|\int_0^1|\frac{\partial g}{\partial x_j}(\frac{t}{\lambda}x)|dt\leq\frac{1}{\lambda}p_1(g)\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{}0,$$
Considérons les suites $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ et $(h_\lambda)_{\lambda>0}$ définies par
$$f_\lambda(x)=\varphi(\frac{x}{\lambda})\hat{g}(x)\qquad h_\lambda(x)=g(\frac{x}{\lambda})\hat{\varphi}(x),$$
Nous pouvons vérifier que
(1) Pour tout $\lambda>0$, $f_\lambda=\sigma_{\lambda^{-1}}\varphi.\hat{g}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d\subset L^1(\mathbb{R}^d)$ comme produit de deux fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ puisque $\sigma_{\lambda^{-1}}\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, donc $\hat{g}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ étant continu de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. De même, $h_\lambda=\sigma_{\lambda^{-1}}g.\hat{\varphi}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d\subset L^1(\mathbb{R}^d)$, pour les mêmes raisons.
(2) Pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ nous avons $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}f_\lambda(x)=\varphi(0)\hat{g}(x)$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}h_\lambda(x)=\hat{\varphi}(x)g(0)$.
(3) Comme les fonctions $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors pour tout $y\in\mathbb{R}^d$ nous avons $|\varphi(y)|\leq\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}=p_0(\varphi)$, donc Pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et pour tout $\lambda>0$, nous avons $|\varphi(\frac{x}{\lambda})|\leq\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$. De même, comme $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $|g(\frac{x}{\lambda})|\leq\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}=p_0(g)$. Posons $M=\max\{\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\}$. On a alors pour tout $\lambda>0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^d$:
$$|f_\lambda(x)|\leq M|\hat{g}(x)|\quad\text{et}\quad|h_\lambda(x)|\leq M|\hat{\varphi}(x)|$$
On en déduit que les suites $(|f_\lambda|)_{\lambda>0}$ et $(|h_\lambda|)_{\lambda>0}$ sont dominées par les fonctions positives et intégrables $M|\hat{g}|\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $M|\hat{\varphi}|\in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Les propriétés $(1),(2)$ et (3) permettent d'appliquer le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue aux suites $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ et $(h_\lambda)_{\lambda>0}$, donc
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_\lambda(x)dx=\int_{\mathbb{R}^d}g(0)\hat{\varphi}(x)dx\qquad\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}h_\lambda(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(0)\hat{g}(x)dx.$$
Comme nous avons prouvé que pour tout $\lambda>0$, $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}f_\lambda(x)dx=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}h_\lambda(x)dx$, par unicité de la limite, nous obtenons
$$\frac{g(0)}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(x)dx=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}g(0)\hat{\varphi}(x)dx=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(0)\hat{g}(x)dx=\frac{\varphi(0)}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{g}(x)dx.$$

4. Le résultat obtenu dans la question 3. est vrai pour toute fonction $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Considérons la fonction particulière φ définie pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ par $\varphi(x)=e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ qui est la fonction Gaussienne étudiée en cours. On sait que $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, que $\hat{\varphi}=\varphi$ et que $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)dx=\hat{\varphi}(0)=\varphi(0)=1$. Par conséquent, on a montré que
$$g(0)=g(0)\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)dx=g(0)\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(x)dx=\frac{\varphi(0)}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{g}(x)dx=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{g}(x)dx.$$

5. Soit $x\in\mathbb{R}^d$. En utilisant l'opérateur de translation τ_{-x} appliqué à la fonction g au point $(-x)$ défini pour tout $y\in\mathbb{R}^d$ par $\tau_{-x}g(y)=g(y-(-x))$, on sait que si $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $\tau_{-x}g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et que en particulier pour $y=0$, nous avons $\tau_{-x}g(0)=g(x)$. En appliquant le résultat de la question 4. à la fonction $\tau_{-x}g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on a montré que
$$g(x)=\tau_{-x}g(0)=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\mathscr{F}(\tau_{-x}g)(\xi)d\xi.$$

Or, on a, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, en utilisant l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue :

$$\mathscr{F}(\tau_{-x}g)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<y,\xi>} (\tau_{-x}g)(y)dy = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<y,\xi>} g(y+x)dy =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<y-x,\xi>} g(y)dy = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<x,\xi>} e^{-i<y,\xi>} g(y)dy = e^{i<x,\xi>}\hat{g}(\xi).$$

On conclut donc que

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<x,\xi>} \hat{g}(\xi)d\xi.$$

□

Exercice 2. 1. Soit $v \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$ tels que $(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\hat{v} \in L^2(\mathbb{R})$. Prouver que $\hat{v} \in L^1(\mathbb{R})$. En déduire que v définit une fonction continue et bornée dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On considère une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}), f \geq 0$ telle que $(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{4}} f \notin L^1(\mathbb{R})$. On pose

$$u = \mathscr{F}^{-1}\big((1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{4}} f\big), \qquad (\mathscr{S}'(\mathbb{R})),$$

où $\mathscr{F}$ désigne l'opérateur de Fourier au sens des distributions tempérées.

2.1 Prouver que $u \in L^2(\mathbb{R})$ et $(1+|\xi|^2)^{1/4}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$.

2.2 Définissons la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} u(x) n e^{-\frac{(nx)^2}{2}} dx.$$

(2.2.i) En utilisant les propriétés de la fonction Gaussienne θ étudiée en cours et les propriétés de l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2n^2}} d\xi.$$

(2.2.ii) En utilisant le lemme de Fatou, prouver que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = +\infty$.

3. En déduire par l'absurde que u ne peut pas définir une fonction bornée.

Corrigé de l'Exercice 2.(12 points). 1. Soit $v \in L^2(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe $v^* \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\mathscr{F}(T_v) = T_{v^*}$ $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}))$ et $\|v^*\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}$. On a posé alors $\hat{v} = v^*$ transformée de Fourier de la fonction v dans $L^2(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que la fonction $h\colon \xi \mapsto h(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\hat{v} \in L^2(\mathbb{R})$. Prouvons que $\hat{v} \in L^1(\mathbb{R})$. Pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\hat{v}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\hat{v}(\xi).\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}} := h(\xi).g(\xi).$$

où $g(\xi) := \dfrac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}} > 0$. La fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$. En effet, on écrit $g^2(\xi) = g^2(\xi)\mathbf{1}_{\{|\xi|\leq 1\}}(\xi) + g^2(\xi)\mathbf{1}_{\{|\xi|\geq 1\}}(\xi)$.

La fonction $g_1\colon \xi \mapsto g_1(\xi) = g^2(\xi)\mathbf{1}_{\{|\xi|\leq 1\}}(\xi) = \dfrac{\mathbf{1}_{\{|\xi|\leq 1\}}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ car c'est une fonction continue sur le compact $\bar{B}(0,1) = \{\xi\colon |\xi| \leq 1\}$.

La fonction $g_2\colon \xi \mapsto g_2(\xi) = g^2(\xi)\mathbf{1}_{\{|\xi|\geq 1\}}(\xi) = \dfrac{\mathbf{1}_{\{|\xi|\geq 1\}}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ car pour $|\xi| \geq 1$ nous avons $0 \leq g_2(\xi) \leq \dfrac{1}{|\xi|^{1+4\varepsilon}}$, or la fonction $\xi \mapsto \dfrac{1}{|\xi|^{1+4\varepsilon}} \in L^1(\{|\xi| \geq 1\})$ si et seulement si $1+4\varepsilon > 1$, ce qui est vrai pour tout $\varepsilon > 0$.

Par conséquent $g^2 = g_1 + g_2 \in L^1(\mathbb{R})$, donc $g \in L^2(\mathbb{R})$. D'après l'inégalité de Cauchy- Schwarz, $\hat{v}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ comme produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$: la fonction $h := (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\hat{v}$ et la fonction g.

Prouvons alors que v définit une fonction continue et bornée dans $\mathbb{R}$. Comme $\hat{v} \in L^1(\mathbb{R})$, on a vu que $\mathscr{F}(\hat{v}) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Posons $w = \mathscr{R}\mathscr{F}(\hat{v}) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Il sagit de prouver que $v = w$ p.p dans $\mathbb{R}$. Il suffit de prouver que au sens des distributions, on ait $T_v = T_w$ $(\mathscr{D}'(\mathbb{R}))$. On a vu que $T_{\hat{v}} = \mathscr{F}(T_v)$ $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}))$. Comme $\hat{v} \in L^1(\mathbb{R})$, on sait aussi que $\mathscr{F}(T_{\hat{v}}) = T_{\mathscr{F}(\hat{v})}$ $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}))$. Donc $T_w = T_{\mathscr{R}\mathscr{F}(\hat{v})} = \mathscr{R}\mathscr{F}(T_{\hat{v}}) = \mathscr{R}\mathscr{F}(\mathscr{F}(T_v))$ $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}))$. Comme l'opérateur $\mathscr{F}$ est un isomorphisme dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, et que $\mathscr{R}\mathscr{F} = \mathscr{F}^{-1}$, alors $\mathscr{R}\mathscr{F}(\mathscr{F}) = Id_{\mathscr{S}'(\mathbb{R})}$. par conséquent $T_w = T_v$ $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}))$. La fonction v est bien définie par une fonction continue et bornée dans $\mathbb{R}$.

2. Soit donnée une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}), f \geq 0$ telle que $(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{4}} f \notin L^1(\mathbb{R})$. Posons $u = \mathscr{F}^{-1}\big((1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{4}} f\big)$, $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}))$, par l'isomorphisme $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, on a $\mathscr{F}(u) = \hat{u} = (1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{4}} f$ $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}))$.

(1) Comme la fonction $\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}$ est bornée par la constante égale à 1, nous avons

$$\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{4}} f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(\xi)|^2}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^2 d\xi = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui signifie que $\hat{u} \in L^2$ et $\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Par le Théorème de Plancherel $\mathscr{F}(\hat{u}) \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\mathscr{F}(\hat{u})\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Par le même raisonnement que ci-dessus, on sait qu'il existe $v^{**} \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$T_{v^{**}} = \mathscr{F}T_{\hat{u}} = \mathscr{F}(\mathscr{F}T_u) = \mathscr{R}T_u = T_{\mathscr{R}u}, \quad (\mathscr{S}'(\mathbb{R})).$$

ce qui implique que $v^{**} = \mathscr{R}u$ p.p dans $\mathbb{R}$, donc $u = \mathscr{R}v^{**} \in L^2(\mathbb{R})$.

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, les polynômes $\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^s$ appartiennent à l'espace des multiplicateurs $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$. En particulier pour $s = \frac{1}{4}$, la distribution $(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}}\hat{u} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ et on a pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$$< (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}}\hat{u}, \varphi > = < \hat{u}, (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}}\varphi > = < (1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{4}}f, (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}}\varphi > = < f, \varphi >,$$

c'est à dire que $(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}}\hat{u} = f \quad (\mathscr{S}'(\mathbb{R}))$. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, ceci implique que $(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{4}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $\theta(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. On a vu en cours que que $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et que $\hat{\theta} = \theta$. Par conséquent $ne^{-\frac{(nx)^2}{2}} = n\theta(nx) = n\hat{\theta}(nx)$. Or, on peut vérifier par un changement de variable $y \mapsto \dfrac{y}{n}$ que

$$n\hat{\theta}(nx) = \frac{n}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi.(nx)}\theta(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-iyx}\theta(\frac{y}{n})dy = \mathscr{F}(\sigma_{\frac{1}{n}}\theta)(x),$$

où $\sigma_{\frac{1}{n}}(\theta)(.) = \theta(\frac{\cdot}{n})$. D'après le propriétés de l'opérateur de Fourier, nous avons vu en cours que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} u(x)ne^{-\frac{(nx)^2}{2}}dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\mathscr{F}(\sigma_{\frac{1}{n}}\theta)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(x)\sigma_{\frac{1}{n}}\theta(x)dx,$$

ce qui implique que $I_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2n^2}}d\xi$.

(3) Pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, posons $f_n(\xi) = \hat{u}(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2n^2}}$. La suite $(f_n)_n$ est une suite de fonctions positives dans $L^1(\mathbb{R})$, puisque $\hat{u} \in L^2$ et $\sigma_{\frac{1}{n}}\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. En outre par passage à la limite, nous avons $\lim_{n\to+\infty} f_n(\xi) = \hat{u}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{4}}f(\xi)$. Par application du lemme de Fatou pour les fonctions mesurables positives, on a

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(\xi)d\xi \geq \int_{\mathbb{R}}\liminf_{n\to+\infty} f_n(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}}\hat{u}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{4}}f(\xi)d\xi,$$

or, par hypothèse, f est positive et $(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{4}}f \notin L^1(\mathbb{R})$. Il s'en suit que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{4}}f(\xi)d\xi = +\infty$.

Par conséquent $\liminf_{n\to+\infty} I_n = \liminf_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(\xi)d\xi = +\infty$, c'est à dire que $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

3. Supposons que la fonction $|u|$ soit bornée. Alors il existe $M > 0$ tel que pour p.p tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $|u(x)| \leq M$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a dans l'expression de I_n qui est une suite de nombres réels positifs :

$$I_n \leq \int_{\mathbb{R}}|u(x)|n\theta(nx)dx \leq M\int_{\mathbb{R}} n\theta(nx)dx.$$

En faisant le changement de variable approprié $y \mapsto \dfrac{y}{n}$ ayant un Jacobien égal a$\dfrac{1}{n}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n \leq M\int_{\mathbb{R}}\theta(y)dy = M\sqrt{2\pi}.$$

La suite $(I_n)_n$ est donc bornée dans $\mathbb{R}_+$. On peut alors en extraire une sous suite $(I_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers un nombre $l \in \mathbb{R}_+$, ce qui une contradiction puisque $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$. La fonction u ne peut pas définir une fonction bornée.

□

Épreuve de Contrôle Continu

Exercice 3. 1. Soit $f \in \mathscr{C}_0^1(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $R > 0$ tel que $\operatorname{supp} f \subset \{x \in \mathbb{R} \colon |x| \leq R\}$. Prouver que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\mathscr{F}(f')(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$.

En déduire que si on pose $C = \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})}$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $|\xi| \geq 1$, alors

$$|\hat{f}(\xi| \leq \frac{(2\pi)^{-d/2}C}{|\xi|}.$$

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

Soit $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$ et $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$ et vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq \chi(x) \leq 1$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = \chi(\dfrac{x}{n})f(x)$.

(1) Prouver que la suite $(f_n)_{n\geq 1)}$ converge vers la fonction f au sens de la topologie de $L^1(\mathbb{R})$. En déduire que la suite $(\hat{f}_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction $\hat{f}$ dans $\mathbb{R}$.

(2) Prouver que la suite $(f'_n)_{n\geq 1)}$ converge vers la fonction f' au sens de la topologie de $L^1(\mathbb{R})$.

(3) En déduire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\mathscr{F}(f')(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$.

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Prouver que $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

Corrigé de l'épreuve de Contrôle Continu. 1. Soit $f \in \mathscr{C}^1_0(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $R > 0$ tel que $\operatorname{supp} f \subset \{x \in \mathbb{R} \colon |x| \leq R\}$. La fonction f est dans $L^1(\mathbb{R})$ puisqu'elle est continue et à support contenu dans l'intervalle compact $[-R, +R]$. De même la fonction $f' \in L^1(\mathbb{R})$. En effet, comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathbb{R}$, la fonction f' est continue dans $\mathbb{R}$ et $\operatorname{supp} f' \subset \operatorname{supp} f \subset [-R, R]$.

Comme $f' \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est bien définie dans $\mathscr{C}^0_b(\mathbb{R}) := \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Évaluons $\mathscr{F}(f'(\xi)$: Comme $\operatorname{supp} f' \subset [-R, R]$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq R$, nous avons $f'(x) = 0$. Alors

$$\mathscr{F}(f')(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f'(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{[-R,R]} e^{-ix\xi} f'(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} f'(x)dx.$$

Comme les fonctions $x \mapsto e^{-ix\xi}$ et f sont dérivable dans $[-R, R]$, nous pouvons faire une intégration par parties :

$$\mathscr{F}(f')(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} f'(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} (e^{-ix\xi} f(x)|_{x=-R}^{x=R} - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-R}^{R} (-i\xi e^{-ix\xi}) f(x)dx.$$

Comme $\operatorname{supp} f \subset [-R, R]$ alors $f(-R) = f(R) = 0$ et on obtient

$$\mathscr{F}(f')(\xi) = \frac{i\xi}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-R}^{R} (e^{-ix\xi} f(x)dx = \frac{i\xi}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx = i\xi\mathscr{F}(f)(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi).$$

En outre, la continuité de l'opérateur $\mathscr{F}$ de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}^0_b(\mathbb{R})$ implique que

$$\|\mathscr{F}(f'\|_{L^\infty}(\mathbb{R}) \leq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

où, sachant que f' est continue dans $\mathbb{R}$,

$$\|\mathscr{F}(f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\mathscr{F}(f')(\xi)|,$$

Par conséquent pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$|\xi||\hat{f}(\xi)| = |i\xi\hat{f}(\xi)| = |\mathscr{F}(f')(\xi)| \leq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} C,$$

d'où pour $|\xi| \geq 1$ on déduit que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} C}{|\xi|}.$$

2. Soit $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$ et $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$ et vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq \chi(x) \leq 1$.

Définissons pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction χ_n définie par $\chi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\chi_n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. Remarquons aussi que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq n$ nous avons $\chi_n(x) = \chi(\frac{x}{n}) = 0$, donc $\operatorname{supp} \chi_n \subset [-n, n]$. Ceci implique que $\chi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Remarquons en vertu des propriétés de χ que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq (1 - \chi(\frac{x}{n})) \leq 1$ et que comme χ est une fonction continue dans $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \chi(\frac{x}{n}) = \chi(0) = 1$.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = \chi(\frac{x}{n}) f(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n \in \mathscr{C}^1_0(\mathbb{R})$ puisque elle est de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$: la fonction f et la fonction χ_n. En outre nous avons $\operatorname{supp} f_n \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \chi_n \subset \operatorname{supp} \chi_n \subset [-n, n]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f et f_n sont dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$, évaluons $\|f - f_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$:

$$\|f - f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| = \int_{\mathbb{R}} |(1 - \chi(\frac{x}{n})||f(x)|dx,$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g_n(x) = |(1 - \chi(\frac{x}{n})||f(x)|$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions positives dans $L^1(\mathbb{R})$ vérifiant :

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(1 - \chi(\frac{x}{n})\big)|f(x)| = 0$.

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $g_n(x) \leq |f(x)|$ où $|f| \in L^1(\mathbb{R})$.

La suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction 0 et est dominée par une fonction intégrable. D'après le Théorème de la convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{L^1(\mathbb{R})}=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}g_n(x)dx=0,$$

c'est à dire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers la fonction f au sens de la topologie de $L^1(\mathbb{R})$.
D'après le Théorème de Continuité de l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ de $L^1(\mathbb{R})$ vers $\mathscr{C}_b^0(\mathbb{R})$ nous avons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\|\mathscr{F}(f-f_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq(2\pi)^{\frac{1}{2}}\|f-f_n\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Comme $\mathscr{F}(f-f_n)=\hat{f}-\hat{f}_n$ est une fonction continue et bornée dans $\mathbb{R}$, alors

$$\|\hat{f}-\hat{f}_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\hat{f}(\xi)-\hat{f}_n(\xi)|,$$

finalement,

$$\lim_{n\to+\infty}\big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\hat{f}(\xi)-\hat{f}_n(\xi)|\big)\leq(2\pi)^{\frac{1}{2}}\lim_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_{L^1(\mathbb{R})}=0,$$

d'où $\lim_{n\to+\infty}\big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\hat{f}(\xi)-\hat{f}_n(\xi)|\big)=0$ ce qui signifie

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\, n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*\quad\forall\, n\geq 1,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^d,\quad\big(n\geq n_0\quad\Rightarrow\quad|\hat{f}(\xi)-\hat{f}_n(\xi)|\leq\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\hat{f}(\xi)-\hat{f}_n(\xi)|<\varepsilon\big).$$

que la suite de fonctions $(\hat{f}_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction $\hat{f}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, nous avons en dérivant l'expression de f_n :

$$f_n'(x)=\frac{1}{n}\chi'(\frac{x}{n})f(x)+\chi(\frac{x}{n})f'(x),$$

Comme f et f' sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et comme $\chi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\chi'\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$, alors f_n' est intégrable dans $\mathbb{R}$ en tant que somme d'un produit d'une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$ avec une fonction bornée dans $\mathbb{R}$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme f' et f_n' sont dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$, évaluons $\|f'-f_n'\|_{L^1(\mathbb{R})}$:

$$\|f'-f_n'\|_{L^1(\mathbb{R})}=\int_{\mathbb{R}}|f'(x)-f_n'(x)|dx\leq\int_{\mathbb{R}}(1-\chi(\frac{x}{n}))|f'(x)|dx+\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{n}|\chi'(\frac{x}{n})||f(x)|dx.$$

Comme dans la question 2. nous avons vu que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a $0\leq(1-\chi(\frac{x}{n}))\leq 1$ et que comme χ est une fonction continue dans $\mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty}\chi(\frac{x}{n})=\chi(0)=1$. En outre, comme la fonction $\chi'\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$, alors pour tout $y\in\mathbb{R}$, nous avons $|\chi'(y)|\leq\|\chi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.
Posons $h_n(x)=(1-\chi(\frac{x}{n}))|f'(x)|$ et $k_n(x)=\frac{1}{n}|\chi'(\frac{x}{n})||f(x)|$.

(1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $\lim_{n\to+\infty}h_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\big(1-\chi(\frac{x}{n})\big)|f'(x)|=0$ et $\lim_{n\to+\infty}k_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\chi'(\frac{x}{n})|f(x)|=0.\chi'(0)|f(x)|=0$.

(2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $h_n(x)\leq|f'(x)|$ où $|f'|\in L^1(\mathbb{R})$.

(3) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $k_n(x)\leq\|\chi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|f(x)|$ où $|f|\in L^1(\mathbb{R})$.

Les suites de fonctions $(h_n)_{n\geq 1}$ et $(k_n)_{n\geq 1}$ convergent simplement vers la fonction nulle 0 et sont dominées par deux fonctions intégrables dans $\mathbb{R}$. D'après le Théorème de la convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}h_n(x)dx=0\quad\text{et}\quad\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}k_n(x)dx=0.$$

Il s'en suit que

$$\lim_{n\to\infty}\|f'-f_n'\|_{L^1(\mathbb{R})}\leq\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}h_n(x)dx+\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}k_n(x)dx=0,$$

c'est à dire que la suite de fonctions $(f_n')_{n\geq 1}$ converge vers la fonction f' au sens de la topologie de $L^1(\mathbb{R})$.
[1] □

1. *Barème* : *Examen Final* : Exercice 1 : 1.(1 point), 2. (2,5 points), 3.(2 points), 4. (1 point), 5. (1,5 points), Exercice 2 : 1.(4 points), 2. 2.1. (2 points), 2.2.2i (2 points), 2.2.2ii (2 points), 3. (2 points)
Contrôle Continu : 1.(5=3+2 points), 2. (1)(6=3+3 points), 2 (2).(5 points).
Le Chargé de la matière : Ahmed Z. Mokrane