Corrigé de l'examen (Inverses Généralisés)

Exercice 1. *1)* $R(AB) = AR(B) = AR(A) = R(A^2) = R(A)$, *car* A *est groupe-inversible.*
De même on trouve $R(BA) = R(A)$.
On a $N(B) \subset N(AB)$. *Donc il suffit de monter que* $N(AB) \subset N(B)$.
Soit $x \in N(AB) \Rightarrow AB(x) = 0 \Rightarrow B(x) \in N(A)$.
Comme $R(B) = R(A)$, *alors* $B(x) \in N(A) \cap R(A) = \{0\}$. *Donc* $x \in N(B)$.
De même on montre $N(BA) = N(A)$.
2) on a $H = N(B) \oplus R(B) = N(AB) \oplus R(AB)$ *et* $H = N(A) \oplus R(A) = N(BA) \oplus R(BA)$
Donc AB *et* BA *sont groupe-inversibles.*
3) Il suffit d'appliquer la définition du groupe-inverse.

Exercice 2. *1)On a* $C \geq 0$ *et surjectif car* $R(C) = R(A)$. *Donc* C *inversible. (voir le cours)*
2)(a) $\Rightarrow$ *(b). Comme* A *est normal, alors il est EP. Donc* $a(A) < \infty$. *et* $AAA^* = AA^*A$.
(b) $\Rightarrow$ *(a). Par l'application de la question (1) et Puisque* $AAA^* = AA^*A$, *on obtient :*

$$\begin{bmatrix} A_1C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA_1 & CA_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $A_2 = 0$, *car* C *inversible. Alors* $C = A_1A_1^*$ *ceci implique que* $A_1A_1^*C^{-1} = I$, *donc* A_1 *inversible à droite (surjectif)*$d(A_1) = 0$. *D'ou* $a(A_1) = d(A_1) = 0$. *Par conséquent* A_1 *inversible.*
De l'équation $A_1C = CA_1$, *on déduit que* A_1 *normal et donc* A *normal.*
3) Si A *auto-adjoint, alors* $A^\# = A^+$. *Donc* $A^*AA^\# = AAA^+ = AA^+A = A$.
Inversement. L'équation $A^*AA^\# = A$ *implique* $A^*A = A^2$ *(en multipliant à droite par* A*)*
Comme A *groupe-inversible, alors par l'application de la question (1), on obtient* A_1 *inversible (voir le cours). Donc*

$$\begin{bmatrix} A_1^2 & A_1A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^*A_1 & A_1^*A_2 \\ A_2^*A_1 & A_2^*A_2 \end{bmatrix}$$

On conclut que $A_2 = 0$ *et* $A_1^* = A_1$, *car* A_1 *inversible.*

Exercice 3. *1)* $R(AP) = AR(P) = AR(A) = R(A^2) = R(A)$ *fermé, car* A *EP. Donc* AP *est Moore-Penrose inversible.*
2) $R(AP)^* = R(PA^*) = PR(A^*) = PR(A) = R(PA) = R(A) = R(AP)$. *Donc* AP *est EP*

Exercice 4. *1)* $A^DB = A^DAA^DB = A^DA^DAB = 0$ *et* $BA^D = BA^DAA^D = BAA^DA^D = 0$.
2) Si B *est Drazin inversible, on peut déduire aussi* $B^DA = AB^D = A^DB^D = B^DA^D = 0$.
Ceci implique ;

a)$(A+B)(A^D+B^D)=AA^D+BB^D=A^DA+B^DB=(A^D+B^D)(A+B)$.
b) $(A^D+B^D)(A+B)(A^D+B^D)=A^DAA^D+B^DBB^D=A^D+B^D$
c)$(A+B)^{k+1}(A^D+B^D)=(A^{k+1}+B^{k+1})(A^D+B^D)=A^{k+1}A^D+B^{k+1}B^D=A^k+B^k=(A+B)^k$