Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie
Mme. Hanachi Adalet

CORRIGÉ DE L'EXAMEN FINAL DE TOPOLOGIE

2ÈME ANNÉE LICENCE MATHS

Questions de cours. (8pts). Vrai ou faux sur (0.25 pt) et la justification sur (0.75 pt).

1- Soit E un ensemble non vide.
   a- Vrai, par exemple $\tau_d = \mathscr{P}(E)$ et $\tau_g = \{E, \emptyset\}$.
   b- Faux, car si A, B deux parties de E telles que $A \neq B$, on définit $\tau_1 = \{E, \emptyset, A\}$ et $\tau_2 = \{E, \emptyset, B\}$ où $A \nsubseteq B$ et $B \nsubseteq A$.

2- Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E.
   a- Vrai, car $A = \cup_{x\in A}\{x\}$ et chaque $\{x\}$ est fermé parce que E est séparé, comme A est fini, donc la réunion finie des fermés est fermée.
   b- Faux, car dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$, l'intervalle $[0, 1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.

3- a- Vrai, A est un fermé et borné dans$\mathbb{R}$.
   b- Vrai. B est le produit de deux compacts.

4- Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, l'application

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|dx$$

est une norme sur E.

La définition sur (0.5). N est une norme si et seulement si
(i) $N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$
(ii) $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$
(iii)$\forall f, g \in E, N(f + g) \leq N(f) + N(g)$.

(i) (0.5)Soit $f \in E$ t.q $N(f) = 0 \Leftrightarrow |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|dx = 0$ c'est à- dire $|f(0)| = 0$ et $\int_0^1 |f'(x)|dx = 0$, comme $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale d'une fonction positive est positive, on trouve $f(0) = 0$ et $f'(t) = 0; \forall t \in [0, 1]$ donc $f = cste, \forall t \in [0, 1]$ ce qui donne $f \equiv 0$
Remarquons que si $f = 0 \Rightarrow N(f) = 0$, et enfin l'équivalence.

(ii) (0.5)Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $N(\lambda f) = |(\lambda f)(0)| + \int_0^1 |(\lambda f)'(x)|dx = |\lambda| \left[|f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|dx\right] = |\lambda|N(f)$.

(iii) (0.5)Soit $f, g \in E$, on a : $N(f + g) = |(f + g)(0)| + \int_0^1 |(f + g)'(x)|dx = |f(0) + g(0)| + \int_0^1 |f'(x) + g'(x)|dx$

$$\leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(x)|dx + \int_0^1 |g'(x)|dx \leq N(f) + N(g).$$

Alors N est une norme sur E.

Exercice 1 (6 pts) Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $I_a =]-\infty, a]$ et $\mathscr{B} = \{I_a, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$. Soit τ la topologie engendrée par la base $\mathscr{B}$.

1- $\mathscr{B}$ est une base de τ, donc $\forall O \in \tau \Rightarrow \exists (I_a)_{a\in J}, J \subset \mathbb{R}$ t.q $O = \bigcup_{a\in J} I_a$(0.5 pt)

$$\bigcup_{a\in J}]-\infty, a] = \begin{cases}]-\infty, \sup_{a\in J} a] & \text{si } \sup J \in J, (0.25pt) \\ ]-\infty, \sup_{a\in J} a[& \text{sinon} (0.25pt) \\ ]-\infty, +\infty[& \text{si } \sup J = +\infty (0.25pt) \end{cases}$$

Les fermés de τ sont les complémentaires des ouverts :(0.5 pt)

$$\text{F est un fermé} \Rightarrow \begin{cases} F = C_{\mathbb{R}}]-\infty,a] =]a,+\infty[& (0.25pt) \\ F = C_{\mathbb{R}}]-\infty,a] = [a,+\infty[& (0.25pt) \\ F = \mathbb{R};\ \ F = \emptyset. & (0.25pt) \end{cases}$$

2- $A^\circ = \emptyset$ (0.25 pt), $B^\circ = \emptyset$ (0.25 pt) et $C^\circ = \emptyset$. (0.25 pt)
$\overline{A} = [-5,+\infty[$ (0.25 pt) $\overline{B} = [-5,+\infty[$ (0.25 pt) et $\overline{C} = [0,+\infty[$(0.25 pt)

3- L'espace $(\mathbb{R},\tau)$ n'est pas séparé (0.5 pt). Par exemple, si on prend $a=-1$, $b=-2$ avec $a\neq b$, on a $]-\infty,-1]\in\mathscr{V}(a)$ et $]-\infty,-2]\in\mathscr{V}(b)$ et $]-\infty,-1]\cap]-\infty,-2]\neq\emptyset$. (1 pt)

Remarque : (0.5 pt) pour la définition de séparé.

Exercice 2 (6 pts) On définit sur l'espace de Banach $(E,\|.\|_\infty)$ avec $E = C([0,1],\mathbb{R})$, l'application suivante : $\phi : E \to E$ par :

$$\phi(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{4+t^2}dt$$

1- Montrons que $\forall x\in[0,1]$: $\arctan x \leq x$. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\arctan x - \arctan 0 = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \leq \sup_{0\leq t\leq x}\frac{1}{1+t^2}\int_0^x dt$$

la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ est décroissante, donc $\sup_{0\leq t\leq x}\dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+0} = 1$, $\arctan 0 = 0$ et $\int_0^x dt = x$.
Combinant les estimations précédentes, on trouve : $\arctan x \leq x$.(0.5 pt)

2- Montrons que l'équation $\phi(f) - f = 0$ admet une solution unique dans E.
On a $\phi(f) - f = 0 \Leftrightarrow \phi(f) = f$. Donc, il suffit de démontrer que ϕ admet un point fixe unique. (1 pt)
On a $\phi : E\to E$ admet un point fixe unique si et seulement si E est complet, $\phi(E)\subset E$ et ϕ est contractante. **(1.5 pt)**

(i) E est complet, car il est de Banach;

(ii) $\phi(E)\subset E$ par définition;

(iii) ϕ est contractante sur E $\Leftrightarrow \exists k\in]0,1[,\forall f,g\in E : \|\phi(f)-\phi(g)\|_\infty \leq k\|f-g\|_\infty$ (0.5 pt)
Soit $x\in[0,1]$, on a :

$$\phi(f)(x)-\phi(g)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{4+t^2}dt - \int_0^x \frac{g(t)}{4+t^2}dt = \int_0^x \frac{f(t)-g(t)}{4+t^2}dt$$

donc

$$|\phi(f)(x)-\phi(g)(x)| = |\int_0^x \frac{f(t)-g(t)}{4+t^2}dt| \leq \int_0^x \frac{|f(t)-g(t)|}{4+t^2}dt \leq \sup_{t\in[0,x]}|f(t)-g(t)|\int_0^x \frac{dt}{4+t^2}$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|\frac{1}{4}\int_0^x \frac{dt}{4+(\frac{t}{2})^2} = \|f-g\|_\infty\frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2}).$$

$$\sup_{x\in[0,1]}|\phi(f)(x)-\phi(g)(x)| = \|\phi(f)-\phi(g)\|_\infty \leq \sup_{x\in[0,1]}\left[\|f-g\|_\infty\frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \sup_{x\in[0,1]}\arctan(\frac{x}{2}) \leq \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty.$$

Donc, il existe $k = 1/4 \in]0,1[$ tel que :$\forall f,g\in E; \|\phi(f)-\phi(g)\|_\infty \leq k\|f-g\|_\infty$. (2.5 pts)
D'après le théorème du point fixe, admet un point fixe unique.

Remarque :(0.5 p) pour la définition de $\|.\|_\infty$.