Corrigé type de Contrôle Final de Probabilité
L2 - S4

Ex ① $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ où $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$.

1. A et B sont indép $\Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\times P(B) \Rightarrow P(A\cup B) = \frac{2}{3}$ (1)

2. A et B sont incomps $\Rightarrow P(A\cap B) = P(\phi) = 0 \Rightarrow P(A\cup B) = \frac{5}{6}$. (1)

3. $P(A/B) = \frac{1}{2} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cup B) = \frac{7}{12}$. (1)

Ex ② $\left\{ C_i \right.$: "l'assuré est de la $i^{ème}$ catégorie" $P(C_1) = 0{,}2$ et $P(C_2) = 1-0{,}2 = 0{,}8$
$i = 1, 2$

R : " l'assuré risque 1 accident", $P(R/C_1) = 0{,}4$; $P(R/C_2) = 0{,}125$

Soient les v.a. : X = nbr d'accidents des assurés de la $1^{ère}$ Catég
Y = " " " " " $2^{ème}$ "
Z = " " " " ~~[illegible]~~

1. Chaque assuré de la $1^{ère}$ catégorie risque 1 accident (succès) avec $p = 0{,}4$ ou bien ne le risque pas (échec) avec $q = 1-p = 0{,}6$; ce qui en fait l'expérience de Bernoulli, qu'on répète indépendamment 10 fois de suite, d'où $X \sim B(10\,;\,0{,}4)$

où $P(X=k) = C_{10}^{k}\,(0{,}4)^{k}\,(0{,}6)^{10-k}$; $k = \overline{0,10}$ (2)

$P(X\geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1-(0{,}6)^{10} \simeq 0{,}994$.

2. De même $Y \sim B(10\,;\,0{,}125)$ où $P(X=k) = C_{10}^{k}(0{,}125)^{k}(0{,}875)^{10-k}$; $k = \overline{0,10}$

$P(Y\geq 1) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0) = 1 - (0{,}875)^{10} \simeq 0{,}737$. (2)

3. Avec les mêmes arguments de la Q1 $Z \sim B(10\,;\,p_Z)$ $p_Z = ?$.

On a $P(R) = \sum_{i=1}^{2} P(R/C_i)P(C_i) = 0{,}4\times 0{,}2 + 0{,}125\times 0{,}8 \simeq 0{,}18 = p_Z$

Ainsi $P(Z\geq 1) = 1 - P(Z<1) = 1 - P(Z=0) = 1-(0{,}82)^{10} \simeq 0{,}8626$. (2)

Corrigé type de C-F de Proba S4 L2

Ex ③ X = Quantité d'eau dans 1 bouteille

$X \sim N(1\,;\,0{,}02)$ l

1. $P(X=1)=0$ ① car $\int_1^1 f(x)\,dx=0$ où $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

2. $P(0{,}96\leq X\leq 1)=P\left(\frac{0{,}96-1}{0{,}02}\leq Y\leq\frac{1-1}{0{,}02}\right)=F_Y(0)-F_Y(-2)$ ③

où $Y=\frac{X-1}{0{,}02}\sim N(0,1)$. Mais $F_Y(-2)=1-F_Y(2)$, d'où

$P(0{,}96\leq X\leq 1)=F_Y(0)+F_Y(2)-1\simeq 47{,}72\,\%$.

3. $P(X>1{,}1)=1-P(X\leq 1{,}1)=1-P\left(Y\leq\frac{1{,}1-1}{0{,}02}\right)=1-F_Y(5)\simeq$ ①

$\simeq 1-0{,}9999\simeq 0{,}01$. Ce qui en fait 1 probabilité très rare. (F_Y est croissante et dans la table on a F_Y pour 4,8 à partir de laquelle on aura F_Y pour 5).

4. $P(X>1\,/\,X\leq 1{,}1)=\frac{P(1<X\leq 1{,}1)}{P(X\leq 1{,}1)}=\frac{P(0<Y\leq 5)}{P(Y\leq 5)}$ ①

$=\frac{F_Y(5)-F_Y(0)}{F_Y(5)}\simeq 50\,\%$.

Ex ④

1. $f(x)=\begin{cases}1+x & \text{si } -1\leq x\leq 0\\ 1-x & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$ ② ; car $f(x)=ax+b$ où ② si $x\in[-1,0]$ on a $f(-1)=0$ et $f(0)=1$ et si $x\in[0,1]$ on a $f(0)=1$ et $f(1)=0$

2. $P(-0{,}2\leq X\leq 0{,}5)=$ ① $\int_{-0{,}2}^{0{,}5}f(x)\,dx=\int_{-0{,}2}^{0}f(x)\,dx+\int_0^{0{,}5}f(x)\,dx\simeq 0{,}655$

3. $E(X)=$ ① $\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,dx=0$; $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X^2)=$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$. ①