Corrigé type de l'examen final

Exercice 1

1- L'EDP est linéaire, d'ordre 2 , non homogène et c'est une équation stationnaire

2- On a $A = 2$, $B = -4$ et $C = 2$ donc $\Delta = B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$........... $(0,5)$

L'EDP est de type parabolique...................$(0,5)$

3- On a

$$\begin{cases} -\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{-4}{4} = 1 \text{........... } (0,5) \end{cases}$$

Par séparation des variables on obtient:

$$-dy = dx \Leftrightarrow -y = x + c \text{ implique } c = -x - y.$$

Donc $\xi(x,y) = -x-y$ ....$(0,25)$ on peut choisir $\eta(x,y) = x$ ....$(0,25)$ à condition que $|J| \neq 0$, en effet on a:

$$|J| = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{.......... } (0,5)$$

Donc ce changement de coordonnées est inversible.

Cherchons maintenant la forme canonique à cette EDP

On a $(\xi_{xx} = 0,\ \xi_{xy} = 0,\ \xi_{yy} = 0,\ \eta_{xx} = 0,\ \eta_{yy} = 0,\ \eta_{xy} = 0,)$ ....(1)on obtient alors

$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$................ $(0,5)$

$u_{yy} = u_{\xi\xi}$............................... $(0,5)$

$u_{xy} = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}$........................ $(0,5)$

En susttituant dans L'EDP $2u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} = xy^2$ on trouve:

$$\begin{aligned} 2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - 4(u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}) + 2u_{\xi\xi} &= xy^2 \Leftrightarrow 2u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta} - 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 2u_{\xi\xi} = xy^2 \\ &\Leftrightarrow 2u_{\eta\eta} = xy^2, \text{.......................... } (1) \end{aligned}$$

où $x = \eta$ et $y = -\eta - \xi$

Exercice 2

L'EDP est linéaire d'ordre 1 homogène s'écrit sous la forme:...........$(0,25)$

$$b(x)\nabla u(x) + C(x)u(x) = 0,$$

où $b(x) = (-1 \quad x_2)$ et $C(x) = -1$.............. $(0,5)$

Soit s un paramètre positif, $x_1(s)$ et $x_2(s)$ les courbes paramétrisées, $Z(s) = u(x(s))$ et $P(s) = \nabla u(x(s))$ les fonctions caractéristiques. Dans ce cas le système d'EDO à résoudre est le suivant:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(s) = -1 \text{ .... } (0,5) \\ \dot{x_2}(s) = x_2(s) \text{ .... } (0,5) \\ \dot{Z}(s) = -C(x)Z(s) = z(s) \text{..... } (0,5) \end{cases}$$

on trouve:

$x_1(s) = x_1(0) - s$.... $(0,25)$,les courbes sont des droites..... $(0,25)$

$x_2(s) = x_2(0)e^s$... $(0,25)$,les courbes sont fonctions exponentielles.... $(0,25)$

,

$Z(s) = Z(0)e^s$ .....$(0,25)$

D'après les conditions aux bords on a:

$Z(0) = 2x_2(0) = 2x_0$ .. $(0,25)$ et $x_1(0) = 0$... $(0,25)$ d'où

$Z(s) = 2x_0e^s$..... $(0,25)$

On fixe un point (x_1, x_2) de Ω et on cherche x_0 et s de $\mathbb{R}$ tq $x_1 = x_1(s)$ et $x_2 = x_2(s)$

Comme $x_1(0) = 0$ alors $s = -x_1$.... $(0,5)$ et $x_0 = x_2e^{-s}$..... $(0,5)$, par suite

$Z(s) = 2x_2e^{-s}e^s = 2x_2$....... $(0,25)$

Donc la solution est $u(x_1, x_2) = 2x_2$.....(1)

Le domaine d'étude.................$(0,5)$

Exercice 3.

a) C'est l'équation de la corde vibrante...................$(0,25)$

b) Les conditions aux bord sont de type Newmann.....................$(0,25)$

2- Par la méthode de séparation des variables on pose:$u(x,t) = \psi(t)\varphi(x)$ donc $u_t - u_{xx} = 0 \Leftrightarrow \psi^{'}(t)\varphi(x) - \psi(t)\varphi^{''}(x) = 0$... $(0,5)$ $\Leftrightarrow \frac{\psi^{'}(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi^{''}(x)}{\varphi(x)} = -\lambda^2$, ... $(0,25)$on obtient deux EDO une du 2ème ordre:

$\varphi^{''}(x) + \lambda^2\varphi(x) = 0$..... $(0,25)$, l'autre du 1er ordre: $\frac{\psi^{'}(t)}{\psi(t)} = -\lambda^2$....... $(0,25)$

La solution de la première est $\varphi(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$...... $(0,5)$

D'après les conditions aux bords on a:

$u(0,t) = 0 \Leftrightarrow \varphi(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ...$(0,25)$et $u(\pi,t) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\pi) = 0 \Leftrightarrow b\sin\lambda\pi = 0 \Leftrightarrow \lambda\pi = n\pi,\ n \in \mathbb{N}^*$..... $(0,25)$, d'où $\lambda_n = n,\ n \in \mathbb{N}^*$. Donc on obtient une suite de solutions $\varphi_n(x) = b_n\sin\lambda_n x$......... $(0,25)$

Résoudre la 2ème EDO.

On a $\psi(t) = e^{-\lambda^2 t}$ et comme $\lambda = n$ on pose $\psi_n(t) = c_ne^{-\lambda_n^2 t}$...... $(0,25)$

On trouve alors une suite de solutions:

$$u_n(x,t) = \psi_n(t)\varphi_n(t) = A_ne^{-\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x,\ \text{où } A_n = b_nc_n\text{............} (1)$$

Comme l'EDP est linéaire et homogène, d'après alors le principe de superposition toutes combinaisons linéaires de ces solutions est aussi solution du même problème et par passage à la limite (si elle existe quand $n \to \infty$) on obtient:...........$(0,75)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_ne^{-\lambda^2 t}\sin\lambda_n x\text{.....} (0,25)$$

à partir des conditions initiales on a

$$u(x,0) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\lambda_n x = 1, \text{......} (0,25)$$

qui est la série de Fourier associée à la fonction $f : x \mapsto f(x) = 1$, et les A_n sont les coefficients de Fourier de la série de Fourier associée à la fonction $f(x) = 1$ où $0 \leq x \leq \pi$, ...$(0,25)$ et on peut les calculer à partir de l'intégrale suivante:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \text{.......} (0,5)$$

Il vient alors que:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]e^{-\lambda^2 t}\sin\lambda_n x,\ t > 0 \text{ et } 0 \leq x \leq \pi \text{................} (0,5)$$

b) L'équation représente la difusion de la chaleur (ou l'équation de la chaleur)..................................$(0,25)$