Corrigé type
Analyse Complexe

EX 1

1) $u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3a\,x^2 + 2bxy + cy^2 \quad (0{,}5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6ax + 2by \quad (0{,}5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = bx^2 + 2cxy + 3dy^2 \quad (0{,}5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2cx + 6dy \quad (0{,}5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \iff 6ax + 2by + 2cx + 6dy = 0$$

$$\iff 2x(3a + c) + 2y(b + 3d) = 0 \quad (0{,}5)$$

$$\iff \begin{cases} c = -3a & (1{,}5) \\ b = -3d & (1{,}5) \end{cases}$$

2) trouver v pour que $f = u + iv$ soit analytique.

les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent :

$$(0{,}5)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (0{,}5)$$

$$= 3ax^2 - 6dxy - 3ay^2 \quad \ldots (1)$$

$$(0{,}5)\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-6axy - 3dx^2 + 3y^2d) \quad (0{,}5)$$

intégrons (1) par rapport à y, x étant constant, il vient :

$v(x,y) = 3a\,x^2 y - a y^3 - 3d\,y^2 x + f(x) \quad \ldots (2)$

dérivons (2) par rapport à x, on obtient : (0,5)

$\frac{\partial v}{\partial x} = 6a\,xy - 3d\,y^2 + f'(x)$ (0,5)

$= -\frac{\partial u}{\partial y}$

$= +6axy + 3dx^2 - 3dy^2$ (0,5)

par suite : $f'(x) = 3dx^2$ (0,5)

d'où $f(x) = dx^3 + c'$, c' une constante.

(0,5)

Donc :

$v(x,y) = 3a\,x^2 y - a y^3 - 3d y^2 x + d x^3 + c'$ (0,5)

Ex 2

1) $z^2 - 5iz + 3 - i = (x+iy)^2 - 5i(x+iy) + 3 - i$

$= x^2 - y^2 + 5y + 3 + i(2xy - 5x - 1)$ (0,5)

la partie réelle est : $P(x,y) = x^2 - y^2 + 5y + 3$ (0,25)

" imaginaire est : $Q(x,y) = 2xy - 5x - 1$ (0,25)

2) $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x$ (0,5) et $\frac{\partial Q}{\partial y} = 2x$ (0,5), donc $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ (0,5)

et : $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - 5$ (0,5), $\frac{\partial P}{\partial y} = -2y + 5 = -(2y-5)$ (0,5)

$= -\frac{\partial Q}{\partial x}$ (0,5)

les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites

3) puisque les fonctions P et φ sont de classe C^1, et les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites donc f est analytique. 1,5

Ex 3

$$\frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad 1$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{z+\Delta z}{z+\Delta z+i} - \frac{z}{z+i}}{\Delta z} \quad 0,5$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+i)(z+\Delta z) - z(z+\Delta z+i)}{(z+i)(z+\Delta z+i)\Delta z} \quad 0,5$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\cancel{z^2} + \cancel{z\Delta z} + \cancel{iz} + i\Delta z - \cancel{z^2} - \cancel{z\Delta z} - \cancel{iz}}{(z+i)(z+\Delta z+i)\Delta z} \quad 0,5$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{i\,\cancel{\Delta z}}{(z+i)(z+\Delta z+i)\cancel{\Delta z}} \quad 0,5$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{i}{(z+i)(z+\Delta z+i)} = \frac{i}{(z+i)(z+i)} \quad 0,5$$

Donc :

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{i}{(z+i)^2} \quad 0,5$$