Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Méth. Num. pour les EDOs et EDPs
Mme. Hanachi Adalet
2019-2020

CORRIGÉ TYPE D'EXAMEN FINAL
3ÈME ANNÉE LICENCE

Solution d'exercice 1. (12points) Considérons le schéma suivant :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n + ah, x_n + ahf(t_n, x_n)); \quad \text{où } t_n = nh \text{ et } h = \frac{T}{N}. \tag{0.0.1}$$

- L'étude de la stabilité, la consistance et l'ordre du schéma (0.0.1).

Du schéma (0.0.1), on trouve $\phi(t,x,h) = f(t+ah, x+ahf(t,x))$ 1point

1. La Stabilité. Rappelons que le schéma (0.0.1) est stable ssi ϕ est Lipschitzienne par rapport à x.1point
   C-à-d il existe $C > 0$ indépendante de h telle que $\forall(t,x,h),(t,y,h) \in [0,T]X\mathbb{R}^2X[0,h_0]$ on a
   $$|\phi(t,x,h) - \phi(t,y,h)| \leq C|x-y| \qquad (1\text{point})$$
   En effet
   $$\begin{aligned} |\phi(t,x,h) - \phi(t,y,h)| &= |f(t+ah, x+ahf(t,x)) - f(t+ah, y+ahf(t,y))| \\ &\leq L|x+ahf(t,x) - (y+ahf(t,y))| \leq L|x-y| + ahL|f(t,x) - f(t,y)| \\ &\leq (L+ah_0L^2)|x-y| \end{aligned}$$
   1point
   Donc pour tout $a \in [0,1]$, il existe $C = (L+ah_0L^2) > 0$ et indépendante de h telle que la fonction ϕ est Lipschitzienne.0.5 point
2. La consistance du schéma. Rappelons que le schéma est consistant ssi $\phi(t,x,0) = f(t,x)$. 1point
   On a
   $$\phi(t,x,0) = f(t+0, x+0) = f(t,x)$$
   ce qui donne que le schéma est consistant au moins d'ordre 1.1point
3. L'ordre du schéma. Pour déterminer l'ordre du schéma il faut calculer les dérivées partielles par rapport à h de ϕ au point $(t,x,0)$.En effet
   $$\begin{aligned} \partial_h\phi(t,x,h) &= \frac{\partial}{\partial h} f(t+ah, x+ahf(t,x)) \\ &= a\Big(\partial_t f(t+ah, x+ahf(t,x)) + \partial_y f(t+ah, x+ahf(t,x))f(t,x)\Big) \end{aligned}$$
   1.5point
   donc pour $h = 0$, on trouve
   $$\partial_h\phi(t,x,0) = a\Big(\partial_t f(t,x) + \partial_y f(t,x).f(t,x)\Big) = af^{(1)}(t,x)$$
   0.5 point
   ce qui donne que le schéma est au moins d'ordre 2 ssi $a = \frac{1}{2}$1point.
   On teste maintenant est ce que l'ordre est exactement 2 ou plus grand ?
   $$\begin{aligned} \partial_h^2\phi(t,x,h) &= \frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(f(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}hf(t,x))\right) \\ &= \partial_h\left(\frac{1}{2}\Big(\partial_t f(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}hf(t,x)) + \partial_y f(t+\frac{1}{2}h, x+\frac{1}{2}hf(t,x))f(t,x)\Big)\right) \end{aligned}$$

En utilisant la règle des chaîne et après des calculs, on trouve

$$\partial_h^2\phi(t,x,0)=\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x)+2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}(t,x)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)f^2(t,x)\Big)$$

1point

D'autre part,on a

$$\frac{1}{3}f^{(2)}(t,x)=\frac{1}{3}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x)+2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}(t,x)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)f^2(t,x)\Big)\neq\partial_h^2\phi(t,x,0)$$

1point

Donc le schéma est exactement d'ordre 2 pour $a=\frac{1}{2}$.0.5point

Solution d'exercice 2 8points Soit le schéma multipas suivant :

$$x_{n+2}+(b-1)x_{n+1}-bx_n=\frac{h}{4}\big((b+3)f_{n+2}+(3b+1)f_n\big);\text{ où } f_n=f(t_n,x_n). \tag{0.0.2}$$

1. Le schéma (0.0.2) est à 2 pas1point.

2. Si $b\neq -3$ le schéma est implicite, donc il est stable1point.
   Sinon le schéma est explicite et dans ce cas on ne peut pas confirmer la stabilité avant d'étudier 0.5point.
3. L'étude de l'ordre selon les valeurs de b. En utilisant le critère de l'ordre, l'ordre est p ssi

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{i=2}\alpha_i=0; \quad \sum_{i=0}^{i=2}i\alpha_i=\sum_{i=0}^{i=2}\beta_i\\ \sum_{i=0}^{i=2}i^2\alpha_i=2\sum_{i=0}^{i=2}i\beta_i\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^{i=2}i^p\alpha_i=p\sum_{i=0}^{i=2}i^{p-1}\beta_i\end{cases} \tag{0.0.3}$$

1point

avec $\alpha_2=1,\alpha_1=b-1,\alpha_0=-b$ et $\beta_2=\frac{b+3}{4},\beta_1=0,\beta_0=\frac{3b+1}{4}$ 1point

En effet

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{i=2}\alpha_i=0; \quad \sum_{i=0}^{i=2}i\alpha_i=\sum_{i=0}^{i=2}\beta_i=b+1\\ \sum_{i=0}^{i=2}i^2\alpha_i=b+3=2\sum_{i=0}^{i=2}i\beta_i\\ \sum_{i=0}^{i=2}i^3\alpha_i=b+7 \quad \text{et} \quad 3\sum_{i=0}^{i=2}i^2\beta_i=3b+9\end{cases} \tag{0.0.4}$$

1.5points

pour que le schéma soit au moins d'ordre 3 il faut que $3b+9=b+7$, donc $b=-1$1point.

On teste l'ordre 4.

$$\sum_{i=0}^{i=2}i^4\alpha_i=14; \quad \text{et} \quad 4\sum_{i=0}^{i=2}i^3\beta_i=16 \tag{0.0.5}$$

Combinant (0.0.4) et (0.0.5), on trouve le schéma (0.0.2) est exactement d'ordre 3 si $b=-1$1point