EXAMEN DE RATTRAPAGE

Énoncé et Corrigé.

Exercice.

1. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression
$$\langle u, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(1-x)}{2x-1}dx,$$
existe dans $\mathbb{C}$ et définit une distribution u sur $\mathbb{R}$ d'ordre ≤ 1.
2. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression
$$\langle v, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)+\varphi(1-x)-2\varphi(\frac{1}{2})}{(2x-1)^2}dx,$$
existe dans $\mathbb{C}$ et définit une distribution v sur $\mathbb{R}$ d'ordre ≤ 2.
3. Soit ψ la fonction $x \mapsto \psi(x) = 2x-1$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver la valeur de la distribution $\psi.v$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Barème :

1. (7 POINTS), 2. (10 POINTS), 3. (3 POINTS).

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2x-1}$ est continue dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, mais elle n'est pas intégrable au voisinage de $x = \frac{1}{2}$. En effet, par exemple pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ et pour $x \in]\varepsilon + \frac{1}{2}, +1[$, on a $0 < \varepsilon < 2x-1 < 1$, et
$$\int_{\varepsilon+\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{|2x-1|} = \frac{1}{2}\ln(2x-1)|_{x=\varepsilon+\frac{1}{2}}^{x=1} = -\frac{1}{2}\ln(2\varepsilon),$$
Comme $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(-\ln(2\varepsilon)) = +\infty$, par le Lemme de Fatou on a
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{|2x-1|} = +\infty$$
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Utilisons le développement de Taylor de φ en $\frac{1}{2}$ jusqu'à l'ordre 1 : Pour tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons
$$\varphi(y) = \varphi(\frac{1}{2}) + (y-\frac{1}{2})\psi(y) \qquad \text{avec} \quad \psi(y) = \int_0^1 \varphi'((1-t)\frac{1}{2}+ty)dt.$$
La fonction ψ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}$ en vertu du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre et du fait que $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Par conséquent, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, en prenant $y = x$ et $y = 1-x$ on a :
$$\varphi(x) = \varphi(\frac{1}{2}) + (x-\frac{1}{2})\psi(x) \qquad \text{et} \quad \varphi(1-x) = \varphi(\frac{1}{2}) + (1-x-\frac{1}{2})\psi(1-x),$$
d'où
$$\varphi(x)-\varphi(1-x) = (x-\frac{1}{2})\big(\psi(x)+\psi(1-x)\big).$$
et
$$w(x) := \frac{\varphi(x)-\varphi(1-x)}{2x-1} = \frac{1}{2}\frac{\varphi(x)-\varphi(1-x)}{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\psi(x)+\psi(1-x)) \qquad x \neq \frac{1}{2}.$$
La fonction w est continue dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ comme somme de deux fonctions continues dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ et se prolonge par continuité en $x = \frac{1}{2}$ en posant $w(\frac{1}{2}) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\big(\psi(x)+\psi(1-x)\big) = \psi(\frac{1}{2}) = \varphi'(\frac{1}{2})$.
En outre, comme $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, et donc que son support est un ensemble compact dans $\mathbb{R}$, il existe $R(\varphi) := R > 1$ *dépendant de* φ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, +R]$.
Posons $R' = R+1$. On remarque d'abord que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R] \subset [-R', R']$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq R' > R$, alors d'une part $\varphi(x) = 0$. D'autre part $x \geq R'$ implique que $1-x \leq -R$ et donc $\varphi(1-x) = 0$.
Si par contre $x \leq -R' = -1-R < 1-R$, alors d'une part $x < -R$ et donc $\varphi(x) = 0$, et d'autre part $1-x > R$, et donc $\varphi(1-x) = 0$.

En conclusion pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $x\geq R'$ ou $x\leq -R'$, c'est à dire $|x|\geq R'$ on a $\varphi(x)=\varphi(1-x)=0$. On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|\geq R'$ on a $w(x)=0$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{|\varphi(x)-\varphi(1-x)|}{|2x-1|}dx=\int_{|x|\leq R'}|w(x)|dx+\int_{|x|\geq R'}|w(x)|dx=\int_{|x|\leq R'}|w(x)|dx.$$

Cela implique que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)-\varphi(1-x)}{2x-1}dx$ existe dans $\mathbb{C}$ et définit un nombre complexe que l'on notera $\langle u,\varphi\rangle$, comme intégrale d'une fonction continue sur l'intervalle compact $[-R',R']$ et

$$<u,\varphi>:=\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)-\varphi(1-x)}{2x-1}dx=\int_{-R'}^{R'}w(x)dx=\int_{-R'}^{R'}\frac{1}{2}\big(\psi(x)+\psi(1-x)\big)dx.$$

À chaque $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ on associe un unique nombre complexe $\langle u,\varphi\rangle=\displaystyle\int_{-R'}^{R'}w(x)dx=\int_{-R'}^{R'}\frac{1}{2}\big(\psi(x)+\psi(-x)\big)dx$. Cette opération définit donc une application $u\colon\mathscr{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$. C'est une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, grâce aux propriétés de linéarité de l'intégrale. Prouvons que u est une application continue au sens de la topologie de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$:
Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Il existe donc $R(K)>0$ *dépendant de* K tel que $K\subset[-R(K),+R(K)]$. Soit $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que supp $\subset K$. Cela implique que en répťant le raisonnement ci-dessus pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|\geq R(K)$ alors $\varphi(x)=\varphi(1-x)=w(x)=0$.
Nous pouvons alors reprendre le raisonnement précédent mais *relativement à* K :

$$<u,\varphi>=\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx=\int_{-R(K)}^{R(K)}w(x)dx=\int_{R(K)}^{R(K)}\frac{1}{2}\big(\psi(x)+\psi(1-x)\big)dx,$$

avec pour tout $y\in\mathbb{R}\quad\psi(y)=\displaystyle\int_0^1\varphi'((1-t)\frac{1}{2}+ty))dt$. Or la fonction $|\varphi'|$ est continue et à support contenu dans $\operatorname{supp}\varphi$ donc dans le compact K, elle est donc bornée sur ce compact et y atteint sa borne supérieure et nous avons pour tout $y\in\mathbb{R}$

$$|\psi(y)|\leq\int_0^1|\varphi'((1-t)\frac{1}{2}+ty)|dt\leq\sup_{x\in K}|\varphi'(x)|\int_0^1dt=\sup_{x\in K}|\varphi'(x)|.$$

Ceci entraîne que $|<u,\varphi>|\leq\displaystyle\int_{-R(K)}^{R(K)}\frac{1}{2}\big(|\psi(x)|+|\psi(1-x)|\big)dx\leq\sup_{x\in K}|\varphi'(x)|\int_{-R(K)}^{R(K)}dx=2R(K)\sup_{x\in K}|\varphi'(x|)$. Pour tout K partie compacte de $\mathbb{R}$, il existe $C_K=2(R(K))>0$ et un entier $m=1$ tels que pour tout $\varphi\in\mathscr{D}_K(\mathbb{R})$ on ait

$$|\langle u,\varphi\rangle|\leq C_K\sup_{x\in K}|\varphi'(x|\leq C_K\max\{\sup_{x\in K}|\varphi(x|,\sup_{x\in K}|\varphi'(x|\}=C_Kp_{K,1}(\varphi),$$

donc u est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre ≤ 1. $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

2. La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{(2x-1)^2}$ est continue dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, mais elle n'est pas intégrable au voisinage de $x=\frac{1}{2}$. En effet, par exemple pour tout $\varepsilon\in]0,\frac{1}{2}[$ et pour $x\in]\varepsilon+\frac{1}{2},+1[$, on a $0<\varepsilon<2x-1<1$, et

$$\int_{\varepsilon+\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{(2x-1)^2}=\frac{1}{2}\frac{-1}{2x-1}\Big|_{x=\varepsilon+\frac{1}{2}}^{x=1}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2\varepsilon}-1\Big),$$

Comme $\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{2\varepsilon}-1\right)=+\infty$, par le Lemme de Fatou on a

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{(2x-1)^2}=+\infty.$$

Soit $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Utilisons le développement de Taylor de φ en $\frac{1}{2}$ jusqu'à l'ordre 2 pour analyser le comportement de la fonction $r:x\mapsto r(x)=\dfrac{\varphi(x)+\varphi(1-x)-2\varphi(\frac{1}{2})}{(2x-1)^2}\quad x\neq\frac{1}{2}$. Pour tout $y\in\mathbb{R}$, nous avons

$$\varphi(y)=\varphi(\frac{1}{2})+(y-\frac{1}{2})\varphi'(\frac{1}{2})+(y-\frac{1}{2})^2\chi(y)\qquad\text{avec}\quad\chi(y)=\int_0^1(1-t)\varphi''((1-t)\frac{1}{2}+ty)dt.$$

La fonction χ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}$ en vertu du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre et du fait que $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$, en prenant $y = x$ et $y = 1 - x$ on a

$$\varphi(x) = \varphi(\frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2})\varphi'(\frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2})^2\chi(x)$$
$$\varphi(1-x) = \varphi(\frac{1}{2}) + (1-x-\frac{1}{2})\varphi'(\frac{1}{2}) + (1-x-\frac{1}{2})^2\chi(1-x)$$

d'où

$$\varphi(x) + \varphi(1-x) - 2\varphi(\frac{1}{2}) = (x - \frac{1}{2})^2\big(\chi(x) + \chi(1-x)\big).$$

et

$$\frac{\varphi(x) + \varphi(1-x) - 2\varphi(\frac{1}{2})}{(2x-1)^2} := r(x) = \frac{1}{4}(\chi(x) + \chi(1-x)) \qquad x \neq \frac{1}{2}.$$

La fonction r est continue dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ comme somme de deux fonctions continues dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ et se prolonge par continuité en $x = \frac{1}{2}$ en posant $r(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\big(\chi(x) + \chi(1-x)\big) = \dfrac{1}{2}\chi(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}\varphi''(\dfrac{1}{2})$.

En outre, comme $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, et donc que son support est un ensemble compact dans $\mathbb{R}$, il existe $R' > 1$ *dépendant de* φ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R', +R']$, et donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons l'implication

$$|x| \geq R' \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \varphi(1-x) = 0.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq R'$ on a $r(x) = -2\dfrac{\varphi(\frac{1}{2})}{(2x-1)^2}$ et donc que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x) + \varphi(1-x) - 2\varphi(\frac{1}{2})|}{(2x-1)^2}dx \leq \int_{|x|\leq R'} |r(x)|dx + 2|\varphi(\frac{1}{2})| \int_{|x|\geq R'} \frac{dx}{(2x-1)^2}.$$

La première intégrale du second membre est finie puisque on intègre une fonction continue $|r|$ sur une partie compacte $[-R', R']$.

La deuxième intégrale du second membre est finie puisque on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq R' > 1$,

$$|2x-1| \geq 2|x| - 1 \geq 2|x| - |x| = |x| \geq R',$$

ce qui implique que

$$\int_{|x|\geq R'} \frac{dx}{(2x-1)^2} \leq \int_{|x|\geq R'} \frac{dx}{x^2} = 2\int_{[R', +\infty[} \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{R'} < +\infty.$$

Posons $C(\varphi) = 2\displaystyle\int_{|x|\geq R'} \frac{dx}{(2x-1)^2} > 0$. Ceci implique que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) + \varphi(1-x) - 2\varphi(\frac{1}{2})}{(2x-1)^2}dx$ existe dans $\mathbb{C}$ et définit un nombre complexe que l'on notera $\langle v, \varphi\rangle$,

$$< v, \varphi >: = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) + \varphi(1-x) - 2\varphi(\frac{1}{2})}{(2x-1)^2}dx = \int_{-R'}^{R'} r(x)dx + \varphi(\frac{1}{2})C(\varphi)$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-R'}^{R'} \big(\chi(x) + \chi(1-x)\big)dx + +\varphi(\frac{1}{2})C(\varphi).$$

À chaque $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ on associe un unique nombre complexe $\langle v, \varphi\rangle = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-R'}^{R'} \big(\chi(x) + \chi(1-x)\big)dx + \varphi(\frac{1}{2})C(\varphi)$. Cette opération définit donc une application $v : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$. C'est une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, grâce aux propriétés de linéarité de l'intégrale. Prouvons que v est une application continue au sens de la topologie de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$:

Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Il existe donc $R(K) > 1$ *dépendant de* K tel que $K \subset [-R(K), +R(K)]$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} \subset K$. Cela implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq R(K)$ alors $\varphi(x) = \varphi(1-x) = 0$.

Nous pouvons alors reprendre le raisonnement précédent mais *relativement à* K :

$$< v, \varphi >= \frac{1}{4}\int_{-R(K)}^{R(K)} \big(\chi(x) + \chi(1-x)\big)dx + \varphi(\frac{1}{2})C(K),$$

avec $C(K) = 2\displaystyle\int_{|x|\geq R(K)} \frac{dx}{(2x-1)^2} > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$ $\quad \chi(y) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)\varphi''((1-t)\frac{1}{2} + ty))dt.$

La fonction $|\varphi''|$ est continue et à support contenu dans $\operatorname{supp}\varphi$ donc dans le compact K. Les fonctions $|\varphi|$ et $|\varphi''|$ sont donc bornées sur ce compact et y atteignent leurs bornes supérieures et nous avons pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$|\chi(y)| \leq \int_0^1 (1-t)|\varphi''((1-t)\frac{1}{2} + ty)|dt \leq \sup_{x\in K}|\varphi''(x)| \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}\sup_{x\in K}|\varphi''(x)|,$$

et nous avons aussi $|\varphi(\frac{1}{2})| \leq \sup_{x\in K}|\varphi(x)|$. Ceci entraîne que

$$|< v, \varphi >| \leq \frac{1}{4}\int_{-R(K)}^{R(K)} \big(|\chi(x)| + |\chi(1-x)|\big)dx + |\varphi(\frac{1}{2})|C(K) \leq \frac{1}{2}R(K)\sup_{x\in K}|\varphi''(x|) + C(K)\sup_{x\in K}|\varphi(x)|.$$

Pour tout K partie compacte de $\mathbb{R}$, il existe $\tilde{C}_K = 2\max\{\frac{1}{2}(R(K)), C(K)\} > 0$ et un entier $m = 2$ tels que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$ on ait

$$|\langle v, \varphi\rangle| \leq \max\{\frac{1}{2}(R(K)), C(K)\}\big(\sup_{x\in K}|\varphi''(x| + \sup_{x\in K}|\varphi(x)|\big) \leq \tilde{C}_K\max\{\sup_{x\in K}|\varphi(x|, \sup_{x\in K}|\varphi'(x|, \sup_{x\in K}|\varphi''(x|\} = \tilde{C}_K p_{K,2}(\varphi),$$

donc v est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre ≤ 2. $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

3. Considérons la fonction $\psi : x \mapsto \psi(x) = 2x - 1$. C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   Par définition de la multiplication de la fonction ψ avec la distribution v, $\psi.v$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ définie pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle \psi v, \varphi\rangle = \langle v, \psi\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\psi\varphi)(x) + (\psi\varphi)(1-x) - 2(\psi\varphi)(\frac{1}{2})}{(2x-1)^2}dx.$$

   Or

$$(\psi\varphi)(x) = (2x-1)\varphi(x), \quad (\psi\varphi)(1-x) = \big(2(1-x)-1\big)\varphi(1-x) = -(2x-1)\varphi(1-x) \quad (\psi\varphi)(\frac{1}{2}) = (2\frac{1}{2}-1)\varphi(\frac{1}{2}) = 0.$$

   Par conséquent

$$\begin{aligned}\langle \psi v, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(2x-1)\varphi(x) - (2x-1)\varphi(1-x)}{(2x-1)^2}dx = \int_{\mathbb{R}} (2x-1)\frac{\varphi(x) - \varphi(1-x)}{(2x-1)^2}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(1-x)}{2x-1}dx = \langle u, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

   Ce qui implique que $\psi v = u \quad (\mathscr{D}'(\mathbb{R}))$.