Université de Batna 2
Département de Mathématiques
EDO L3 S5 2019/2020

Le 15/10/2020

Examen de Rattrapage

Exercice 1 (12 points)

Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} y' & = y^4 - y^2 \\ y(0) & = y_0 \in \mathbb{R}^* \end{cases}$.

1- Résoudre directement ce problème. (06 points)

2- Montrer que ce problème admet une seule solution maximale $y : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $0 \in J$, J ouvert. (06 points)

Exercice 2 (08 points)

Soit le problème de Cauchy (P) $\begin{cases} y'' & + \sin t . y' + e^{-t} y = 0 \\ y(t_0) & = \alpha, y'(t_0) = \beta, t_0 \in \mathbb{R}^* \end{cases}$.

1- Transformer ce problème en un système de Cauchy d'ordre 1. (03 points)

2- Montrer que le système d'ordre 1 admet une seule solution maximale. (03 points)

3- Déduire de la question précédente l'existence et l'unicité de la solution du problème (P). (02 points)

Corrigé type

Exercice 1

1.1- Puisque $y_0 \neq 0$, la fonction nulle : $y(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$, n'est pas solution de notre problème. Ainsi $I = \mathbb{R}, \Omega = \mathbb{R}^*$. $\left(\frac{1}{2}\right)$ point

1.2- Si $y_0 = -1$, alors la fonction $y(t) = -1, \forall t \in \mathbb{R}$ est une solution. $\left(\frac{1}{2}\right)$ point

1.3- Si $y_0 = 1$, alors la fonction $y(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$ est une solution. $\left(\frac{1}{2}\right)$ point

1.4- Sinon alors

$$y' = y^4 - y^2 = y^2\left(y^2 - 1\right) \Rightarrow \frac{dy}{y^2\left(y^2-1\right)} = dt$$
$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2\left(y^2-1\right)} = \int dt$$

Mais

$$\frac{1}{y^2\left(y^2-1\right)} = \frac{1}{y^2\left(y-1\right)\left(y+1\right)} = \frac{Ay+B}{y^2} + \frac{C}{y+1} + \frac{D}{y-1} \left(\frac{1}{2} \text{ point}\right)$$
$$= \frac{(A+C+D)y^3 + (B-C+D)y^2 - Ay - B}{y^2\left(y-1\right)\left(y+1\right)} \left(\frac{1}{2} \text{ point}\right)$$

Par identification on aura $A = 0, B = -1, C = -1/2, D = 1/2$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ point. Et donc

$$\frac{1}{y^2\left(y^2-1\right)} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{2(y+1)} + \frac{1}{2(y-1)}$$

Ainsi

$$\int dt = \int \frac{dy}{y^2\left(y^2-1\right)} = -\int \frac{dy}{y^2} - \frac{1}{2}.\int \frac{d(y+1)}{(y+1)} + \frac{1}{2}.\int \frac{d(y-1)}{(y-1)}$$
$$= \frac{1}{y} - \frac{1}{2}.\ln|y+1| + \frac{1}{2}.\ln|y-1| = t + c \quad \text{(1 point)}$$

D'où

$$\frac{1}{y} + \ln\sqrt{\frac{|y-1|}{|y+1|}} = t + c$$

Et quand $t = t_0 = 0$, on aura

$$c = \frac{1}{y_0} + \ln\sqrt{\frac{|y_0-1|}{|y_0+1|}}. \quad \text{(1 point)}$$

Alors la solution de notre problème vérifie la formule

$$t - t_0 = \frac{1}{y} + \ln\sqrt{\frac{|y-1|}{|y+1|}} - \frac{1}{y_0} - \ln\sqrt{\frac{|y_0-1|}{|y_0+1|}} \quad \text{(1 point)}$$

2- On a $f(t,y) = y^4 - y^2$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (1) point et puisque $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = 4y^3 - 2y$ sont continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (2) points on a $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)$, donc localement Lipschitzienne on conclut d'après le théorème de Cauchy Lipschitz l'existence d'une seule solution maximale y (1) point à notre problème avec $\exists T > 0$ où $]t_0 - T, t_0 + T[= J, t_0 = 0$. (2) points

Exercice 2

1- Posons $y_1 = y \Rightarrow y_1' = y' = y_2$ et $y'' = y_2' = y_3$ (1) point, et donc pour $Y = (y_1, y_2)^t$ on écrira $(S)\left\{\begin{array}{ll} Y' & = A(t).Y \quad \text{(1/2) point} \\ Y(t_0) & = (\alpha, \beta)^t \quad \text{(1) point} \end{array}\right.$, avec $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-t} & -\sin t \end{pmatrix}$ (1/2) point

2- Puisque le système (S) est linéaire on aura d'après le théorème de CL l'existence d'une seule solution globale Y de (S)donc maximale. (3) points (Pour Lipschitzienne (2) points et pour continue (1/2) point et la conclusion (1/2) point)

3- On a $Y = (y_1, y_2)^t$ où $y_1 = y$ (1) point, donc d'après la question 2 la solution globale donc maximale y existe et est unique (1) point.