Corrigé type de l'Examen final "EDP"

Exercice 1 (6 points)

1)

a) l'équation de la chaleur : $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$, dans $\mathbb{R}$ (0,5)

b) Dans le cas où la température ne change pas au cours du temps, on a (0,5) $\partial_t u = 0$, donc l'équation de la chaleur prend la forme : $\partial_x^2 u = 0$ (0,5), qui est l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}$. (0,5)

c) l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^n$: $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$. (0,25)

" " " " $\mathbb{R}$ $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ (0,5)

dans $\mathbb{R}$, c'est l'équation de la corde vibrante (0,5)

2) $x^2 u_{xx} - u_{xy} + y u_{yy} = 0$

$a = x^2$, $2b = -1$, $c = y$

Donc :

$$\Delta = b^2 - ac = \frac{1}{4} - (x^2)(y)$$

$$= \frac{1}{4} - x^2 y \quad (0,5)$$

1) $\Delta > 0$ si $\frac{1}{4} - x^2 y > 0$ c.à.d : $y < \frac{1}{4x^2}$.

Dans ce cas l'EDP est hyperbolique. (0,5)

2) $\Delta = 0$ si $y = \frac{1}{4x^2}$, l'EDP est parabolique. (0,5)

3) $\Delta < 0$ si $y > \frac{1}{4x^2}$, l'EDP dans ce cas est elliptique. (0,5)

Exercice 2

(0,25)

l'EDP $u_x + 2x u_y = 2x u$ est linéaire,

soit $s > 0$ un paramètre, $x(s) = (x(s), y(s))$ une courbe paramétrisée telle que : $z(s) = u(x(s))$, $p(s) = \nabla u(x(s))$,

alors l'EDP s'écrit : $b(x(s)) \nabla u(x(s)) + C(x(s)) u(x(s)) = 0$

où $b(x(s)) = (1 \quad 2x)$, $C(x(s)) = -2x(s)$

(0,5)

Dans ce cas on obtient le système d'EDO suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = 1 \text{ .... } (1) & (0,25) \\ \dot{y}(s) = 2\,x(s) \text{ ...... } (2) & (0,25) \\ \dot{Z}(s) = 2\,x(s)\,Z(s) \text{ ... } (3) & (0,25) \end{cases}$$

* De (1) on trouve : $x(s) - x(0) = s$

Donc (0,25) $\boxed{x(s) = x(0) + s}$, les courbes sont des droites. (0,25)

* De (2) $\dot{y}(s) = 2(x(0) + s)$

Donc : $y(s) - y(0) = 2\,x(0)\int_0^s dt + 2\int_0^s t\,dt$

(0,25) $\boxed{y(s) = y(0) + 2\,x(0)\,s + s^2}$, les courbes sont des paraboles. (0,25)

* De (3) on obtient :

$$\frac{\dot{Z}(s)}{Z(s)} = 2\,x(s) = 2(x(0) + s) \text{, intégrons sur } [0,s] \text{ :}$$ (0,5)

$$\ln Z(s) - \ln Z(0) = 2\,x(0)\,s + s^2$$ (0,5)

c.à.d : $\ln \dfrac{Z(s)}{Z(0)} = 2\,x(0)\,s + s^2$

ce qui donne : $\boxed{Z(s) = Z(0)\, e^{2x(0)s + s^2}}$ (0,25)

D'après les conditions au bord on a :

$Z(s) = U(x(s), 0) = x^2(s)$, $y(s) = 0$ (0,25)

d'où $Z(0) = U(x(0), 0) = x^2(0) = x_0^2$. (0,25)

Donc : $Z(s) = x_0^2\, e^{2x_0 s + s^2}$ (0,25), et :

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + s \text{ .... } ① \\ y(s) = 2\,x_0\,s + s^2 \;,\; y(0) = 0 \text{ .... } ② \end{cases}$$

On fixe un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et on cherche x_0 et s tq : $x = x(s)$, $y = y(s)$.

① $\Rightarrow s = x - x_0$ 0,5

② $\Rightarrow y = 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)^2$

$= 2x_0 x - 2x_0^2 + x^2 - 2x x_0 + x_0^2$

$y = x^2 - x_0^2$ implique $x_0^2 = x^2 - y$ 0,5

Donc $Z(s) = x_0^2 e^{2x_0 s + s^2}$

$= (x^2 - y)e^{y}$ / car $y = 2x_0 s + s^2$

D'où : $U(x,y) = (x^2 - y)e^{y}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

0,5

Exercice 3

1 – l'équation de la chaleur. 0,25

2 – les conditions de Dirichlet. 0,25

3 – linéaire, d'ordre 2, homogène, d'évolution. 1

4 – posons $u(x,t) = \psi(t)\varphi(x)$,

$u_t - u_{xx} = 0 \Leftrightarrow \psi'(t)\varphi(x) = \psi(t)\varphi''(x)$

$\Leftrightarrow \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = c$ 0,25

étudions le cas où $c < 0$, posons $c = -\lambda^2$

on obtient deux EDO : du deuxième ordre et du premier ordre

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda^2 \varphi(x) = 0 \quad \ldots\ldots (1) \\ \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda^2 \quad \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

0,25 0,25

Résoudre (1) la solution est donnée par :

$\varphi(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x$ 0,25

d'après les conditions au bord :

$u(0,t) = 0 \Leftrightarrow \varphi(0) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ 0,25

$u(\pi,t)=0 \Leftrightarrow b\sin\lambda\pi = 0$, $b\neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda\pi = n\pi$, $n\in\mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow \lambda = n$, $n\in\mathbb{N}^*$ 0,25

On obtient une suite de solutions : $\varphi_n(x) = B_n \sin nx$

Résoudre (2) la solution est : 0,25

0,25 $\psi_n(t) = C_n \exp(-\lambda^2 t)$, $\lambda = n$

l'EDP admet alors, une suite de solutions :

$u_n(x,t) = \psi_n(t)\,\varphi_n(x)$

$= (B_n \sin nx)(C_n \exp(-\lambda^2 t))$

0,5 $= b_n \sin nx \exp(-\lambda^2 t)$ / $b_n = B_n C_n$

d'après le principe de superposition, toute combinaison linéaire des solutions $u_n(x,t)$, est aussi solution pour le même problème, et par passage à la limite quand $n\to+\infty$ (si la limite existe) on obtient : 0,5

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \exp(-\lambda^2 t)$$ 0,25

reste à déterminer b_n.

à partir de la condition initiale, on a :

$u(x,0)=1-\cos x \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n \sin nx = 1-\cos x$ 0,5

donc b_n sont les coefficients de la série de Fourier associés à la fonction $f(x)=1-\cos x$. 0,5

$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin x\frac{n\pi}{l}\,dx$, $l=\pi$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1-\cos x)\sin nx\,dx$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos x \sin nx\,dx$

0,5

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\sin(x+nx)+\sin(nx-x)\right)dx$$

$$= \frac{-2}{\pi n}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) - \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(1+n)x\,dx$$

$$- \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(n-1)x\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right) - \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n+1}\left[\cos(1+n)x\right]_0^{\pi}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n-1}\cos(n-1)x\right]_0^{\pi}\right]$$

0,5

$$= -\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{1}{\pi(n+1)}\left(\cos(1+n)\pi - 1\right)$$

$$+ \frac{1}{(n-1)\pi}\left(\cos(n-1)\pi - 1\right)$$

0,75

$$= \frac{-2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{1}{(n+1)\pi}\left(\cos(\pi+n\pi) - 1\right) + \frac{1}{(n-1)\pi}\left(\cos(n\pi-\pi) - 1\right)$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{1}{(n+1)\pi}\left((-1)^{n+1} - 1\right) + \frac{1}{(n-1)\pi}\left((-1)^{n+1} - 1\right)$$

$$= \left((-1)^{n+1} - 1\right)\left[\frac{2}{n\pi} + \frac{1}{(n+1)\pi} + \frac{1}{(n-1)\pi}\right]$$

Enfin la solution générale est :

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n\geq 2}\left((-1)^{n+1} - 1\right)\left(\frac{2}{n\pi} + \frac{1}{(n+1)\pi} + \frac{1}{(n-1)\pi}\right)\sin nx\, e^{-\lambda t^2} \\ t > 0,\ x \in]0,\pi[\end{cases}$$

0,5