Nom: .... Prénom: .... Groupe : ....

- Corrigé : Exam 2021

(EVN_AH)

1/ Faux.

un espace préhilbertien complet est un espace de Hilbert.

2/ Vrai : théorème de Pythagore

3/ Faux : tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

4/ Faux contre exemple $[0,1] \subset \mathbb{R}$ est convexe mais n'est pas un s.e. de Hilbert.

5/ faux. il faut que la norme vérifie l'identité du parallélogramme.

6/ Vrai : Exercice de T.D

7/ faux. dans $\mathbb{Q}$ c'est faux (Exercice de TD)

8/ faux. $\{u_n = (-1)^n\}$

$|u_n| = 1$ convergente. et

$\{u_n = (-1)^n\}$ n'est pas convergente.

Nom: .... Prénom: .... Groupe : ....

exercice 1 : soit le plan P

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

1/ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in P$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in P$

$\langle v_1, v_2 \rangle = 1\times 1 + 0\times 1 + (-1)\times 1 = 0$

donc $\{v_1, v_2\}$ est une base orthogonale

2/ Calcul de u^*.

$u^* = \dfrac{\langle u, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \dfrac{\langle u, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2$

$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u^* = \dfrac{-2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}}$

Exercice 2

$\{1, x\}$ est une base des polynômes de degré 1

$\langle 1, x\rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$. donc $\{1, x\}$ est une base orthogonale de l'Espace des polynômes de degré 1. g est la projection orthogonale de f. donc.

$g(x) = \dfrac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} + \dfrac{\langle f, x\rangle}{\langle x, x\rangle} x$

donc : $g(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2 + x^3)\,dx + \frac{3}{2}\left[\int x^3 + x^4\right] x$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2}\times\frac{2}{5} x$

$\Rightarrow \boxed{g\,x = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} x}$

Scanné avec CamScanner