# Examen de rattrapage à distance "Probabilités"

**Exercice 1** *Un certain système a 5 composantes. Une panne du système est causée 35%, 30%, 20%, 10% et 5% des fois par une panne dans les composantes $A, B, C, D$ et $E$, respectivement. On suppose que les pannes simultanées dans plus d'une composante à la fois sont si rares qu'on peut les négliger.*

1. *Si une panne du système n'est pas causée par $A$, quelle est la probabilité qu'elle soit causée par $B$ ?*
2. *Si une panne du système n'est causée ni par $A$, ni par $B$, quelle est la probabilité qu'elle soit causée par $C$ ou $D$ ?*

**Solution de l'exercice 1** *: (04.5pts)*

*Soit $A$ (respectivement $B, C, D$ et $E$) l'évènement « la panne provient de la composante $A$ (respectivement $B, C, D$ et $E$)». (0.5pt)*

1. $\mathbb{P}(B|\overline{A}) = \dfrac{\mathbb{P}(B\cap\overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})}$ *Puisque* $B \subset \overline{A}$ *(0.5pt)*

$$\frac{\mathbb{P}(B\cap\overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\mathbb{P}(B)}{1-\mathbb{P}(A)} = \frac{0,3}{1-0,35} = \frac{30}{65} = 0,46. \quad \textit{(01pt)}$$

2. $\mathbb{P}(C\cup D|\overline{A}\cup\overline{B}) = \dfrac{\mathbb{P}\left((C\cup D)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\right)}{\mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B})}.$

   *Puisque* $(C\cup D)\subset(\overline{A}\cup\overline{B})$ *(0.5pt) et* $(\overline{A}\cup\overline{B}) = (C\cup D\cup E)$ *(0.5pt) , alors*

$$\mathbb{P}(C\cup D|\overline{A}\cup\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(C\cup D)}{\mathbb{P}(C\cup D\cup E)}$$

   *De plus, les pannes simultanées dans plus d'une composante à la fois sont négligeable. Donc :*

$$\mathbb{P}(C\cup D\cup E) = 0 \quad \textit{(0.25pt)} \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}(C\cap D) = 0 \quad \textit{(0.25pt)}$$

   *Finalement*

$$\mathbb{P}(C\cup D|\overline{A}\cup\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(D)+\mathbb{P}(E)} = \frac{30}{35} = 0,86 \quad \textit{(01pt)}$$

**Exercice 2** *Le nombre de pannes d'une voiture de marque $A$ pendant une durée d'un an, est une variable aléatoire $X$ de la loi de probabilité suivante :*

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-3}\times 3^k}{k!}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

1. *Calculer $\mathbb{P}(X=k)$, pour $0\le k\le 5$.*
2. *Quelle est la probabilité d'avoir au plus 5 pannes en un an ? que représente ce résultats.*
3. *Quelle est probabilité d'avoir plus de 2 et moins de 4 pannes ?*
4. *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.*
5. *Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable $X$.*

**Solution de l'exercice 2** *: (07.5pts)*

1. *On a : (1.50pt)*

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=k)$ | $e^{-3}$ <br> $=0.0497$ | $3e^{-3}$ <br> $=0.1493$ | $\frac{3^2e^{-3}}{2!}$ <br> $=0.224$ | $\frac{3^3e^{-3}}{3!}$ <br> $=0.224$ | $\frac{3^4e^{-3}}{4!}$ <br> $=0.168$ | $\frac{3^5e^{-3}}{5!}$ <br> $=0.1008$ |

2. $$\mathbb{P}(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(X=k) = 0.916 \qquad \textit{(0.5pt)}$$

   *Elle représente :* $F_x(5)$ *(0.5pt)*

3. $$\mathbb{P}(2 < X < 4) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(X=3) = 0.224 \qquad \textit{(0.5pt)}$$

4. *On remarque que :* $X(\Omega) = \{k, k \in \mathbb{N}\}$ *(0.5pt)*

   (a) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{e^{-3}3^k}{k!} = 3.e^{-3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3^{k-1}}{(k-1)!} = 3.e^{-3}.e^{3} = 3 \qquad \textit{(01pt)}$$

   (b) $$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \qquad \textit{(0.5pt)} \end{aligned}$$

   *On a :*

   $$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) = 3^2.e^{-3}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{3^{k-2}}{(k-2)!} = 3^2.e^{-3}.e^{3} = 3^2 \qquad \textit{(01pt)}$$

   *Alors*

   $$Var(X) = 3^2 + 3 - 3^2 = 3 \qquad \textit{(0.5pt)}$$

   (a) *Puisque* $X(\Omega) = \{k, k \in \mathbb{N}\}$, *alors*

   $$\forall t \in \mathbb{R} : \quad F_X(t) = \sum_{k \leq t} \mathbb{P}(X=k). \qquad \textit{(0.5pt)}$$

   .

   (b) *la représentation graphique de la fonction de répartition de la variable $X$ est une fonction en escalier. (0.5pt)*

**Exercice 3** *Pour $\theta \in [0,1]$, on considère la fonction suivante :*

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{2+x} & si \quad x \leq -2 \\ 0 & si \quad -2 < x \leq 1 \\ (1-\theta)e^{1-x} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1. *Démontrer que $f$ est une densité de probabilité.*
2. *Soit $X$ une variable aléatoire admettant $f$ pour densité.*
   (a) *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $var(X)$.*
   (b) *Soit $x$ un réel, calculer $\mathbb{P}(X > x)$*

**Solution de l'exercice 3** *: (08pts)*

1. — $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \theta \in [0,1]$ *on a :* $f(x) \geq 0$ *(0.5pt)*
   —
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-2} \theta e^{2+x}dx + \int_{-2}^{1} 0dx + \int_{1}^{+\infty} (1-\theta)e^{1-x}dx \\ &= \left[\theta e^{2+x}\right]_{-\infty}^{-2} + \left[(\theta-1)e^{1-x}\right]_{1}^{+\infty} \\ &= \theta - (\theta - 1) \\ &= 1 \quad \textit{(01pt)}\end{aligned}$$

   *donc $f$ est une densité de probabilité.*

2. (a)
$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} \theta xe^{2+x}dx + \int_{1}^{+\infty} (1-\theta)xe^{1-x}dx$$

   *Par intégration par partie*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \theta\left(\left[xe^{2+x}\right]_{-\infty}^{-2} - \int_{-\infty}^{-2} e^{2+x}dx\right) + (1-\theta)\left(\left[-xe^{1-x}\right]_{1}^{+\infty} - \int_{1}^{+\infty} -e^{1-x}dx\right) \\ &= \theta(-2-1) + (1-\theta)(2) \\ &= -5\theta + 2 \quad \textit{(02pt)}\end{aligned}$$

   (b)
$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} \theta x^2 e^{2+x}dx + \int_{1}^{+\infty} (1-\theta)x^2 e^{1-x}dx$$

   *Par intégration par partie et d'après (a) ona :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \theta\left(\left[x^2 e^{2+x}\right]_{-\infty}^{-2} - 2\int_{-\infty}^{-2} xe^{2+x}dx\right) + (1-\theta)\left(\left[-x^2 e^{1-x}\right]_{1}^{+\infty} - \int_{1}^{+\infty} -xe^{1-x}dx\right) \\ &= \theta(4 - 2(-3)) + (1-\theta)(1 + 2(2)) \\ &= 5(\theta+1) \quad \textit{(02pt)}\end{aligned}$$

   *Donc*

$$Var(X) = 5(\theta+1) - (-5\theta+2)^2 = -25\theta^2 + 25\theta - 3 \quad \textit{(0.5pt)}$$

3. $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F_x(x)$ *On a :*

$$F_X(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \theta e^{2+t} dt & si \quad x \leq -2 \\ \int_{-\infty}^{-2} \theta e^{2+t} dt + \int_{-2}^{x} 0 dt & si \quad -2 < x \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{-2} \theta e^{2+t} dt + \int_{-2}^{1} 0 dt + \int_{1}^{x} (1-\theta) e^{1-t} dt & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \theta e^{2+x} & si \quad x \leq -2 \\ \theta & si \quad -2 < x \leq 1 \\ \theta + (1-\theta)(1 - e^{1-x}) & si \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad \textit{(01.5pt)}$$

*Finalement*

$$\mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} 1 - \theta e^{2+x} & si \quad x \leq -2 \\ 1 - \theta & si \quad -2 < x \leq 1 \\ (1-\theta) e^{1-x} & si \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad \textit{(0.5pt)}$$