03.02.2020 *Énoncé et Corrigé.*

Le Chargé de la Matière
Mokrane A.Z.

(L'exercice 1. et la question 1. de l'exercice 2. sont comptabilisés au titre de l'interrogation écrite.)

Exercice 1. Soit $a \in \mathscr{C}_b^m(\mathbb{R})$. Notons $A\colon u \mapsto A(u) = a.u$ l'opérateur de multiplication par a.

1. Prouver que l'opérateur A est un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. Soit $s \in \mathbb{N}$ tel que $s \leq m$. Soit $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Prouver que $A(u) \in H^s(\mathbb{R})$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|A(u)\|_s \leq C\|a\|_{\mathscr{C}_b^m}\|u\|_s$ et que l'opérateur A se prolonge en un unique opérateur (toujours noté A), continu de $H^s(\mathbb{R})$ dans $H^s(\mathbb{R})$ et que l'estimation (1) est vraie pour tout $u \in H^s(\mathbb{R})$ pour tout $s \in [0, m]$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq s \leq m$. Notons B_k l'opérateur commutateur $B_k := [(\frac{d}{dx})^k, A]$ défini pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ par $B_k u := (\frac{d}{dx})^k(au) - a(\frac{d}{dx})^k(u) = (au)^{(k)} - a(u)^{(k)}$. Prouver que l'opérateur $B_k \circ (\frac{d}{dx})$ est continu de $H^s(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R})$, on ait
$$\|B_k(\frac{du}{dx})\|_0 \leq C\|a\|_{\mathscr{C}_b^m}\|u\|_s. \tag{2}$$

Exercice 2. On considère une fonction $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\theta \subset [-1, 1]$, $0 \leq \theta(x) \leq 1$ et $\int_{\mathbb{R}} \theta(x)dx = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $\theta_n(x) = n\theta(nx)$.

Vérifier que $\theta_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ est telle que $\operatorname{supp}\theta_n \subset \bar{B}(0, \frac{1}{n})$, et que $\int\limits_{\mathbb{R}} \theta_n(x)dx = 1$.

On définit l'opérateur J_n par l'opérateur de convolution avec la fonction θ_n : Pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$
$$J_n(u)(x) := \theta_n * u(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta_n(x-y)u(y)dy.$$

1. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $u \in H^s(\mathbb{R})$. Prouver que $J_n(u) \in \bigcap\limits_{r\in\mathbb{R}} H^r(\mathbb{R})$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|J_n(u) - u\|_s = 0$.
2. Soit $a \in \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R})$. Notons A l'opérateur de multiplication par a. Soit $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ muni de la topologie induite par $L^2(\mathbb{R})$. Posons $[J_n, A](u) = J_n(au) - aJ_n(u)$.
   (1) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $[J_n, A](\frac{d}{dx}u)(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta_n(x-y)\big(a(y) - a(x)\big)\frac{d}{dx}u(y)dy$.
   (2) En effectuant une intégration par parties, et en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1, montrer que qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait
   $$|[J_n, A](\frac{d}{dx}u)(x)| \leq C\|a\|_{\mathscr{C}_b^1}\{\big(|x||\frac{d}{dx}\theta_n| * |u|\big)(x)\} + \big(|\theta_n| * |u|\big)(x)\}.$$
   (3) En utilisant l'inégalité de Young [1] , prouver que $[J_n, A](\frac{d}{dx}u) \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*[$, on ait $\|[J_n, A](\frac{d}{dx}u)\|_0 \leq C\|a\|_{\mathscr{C}_b^1}\|u\|_0$.
   En déduire que l'opérateur $[J_n, A](\frac{d}{dx})$ se prolonge en un unique opérateur (toujours noté $[J_n, A](\frac{d}{dx})$), continu de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et que l'estimation (3) est vraie pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$.
   (4) Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$, Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|[J_n, A](\frac{d}{dx}u)\|_0 = 0$. En déduire que ce résultat reste vrai si $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. (utiliser la densité de $H^1(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$).

Corrigé de l'exercice 1

Rappelons que dans le cas où s est entier, l'espace $H^s(\mathbb{R})$ s'identifie avec l'espace des fonctions $u \in L^2(\mathbb{R})$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq s$ on ait $(\frac{d}{dx})^k u = u^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$ (les dérivations étant prises au sens des distributions). Il est muni de la norme équivalente
$$\|u\|_s = \big(\|u\|_0^2 + \sum_{k=1}^{s} \|u^{(k)}\|_0^2\big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{où} \quad \|u\|_0 = \big(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx\big)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_0 \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_0$ (Inégalité de Young).

Rappelons également que $a \in \mathscr{C}_b^m(\mathbb{R})$ signifie que $a \in \mathscr{C}^m(\mathbb{R})$ tel que que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq m$ on ait $(\frac{d}{dx})^k = u^{(k)}u \in L^\infty(\mathbb{R})$. $\mathscr{C}_b^m(\mathbb{R})$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|a\|_{\mathscr{C}_b^m} = \max_{0\leq k\leq m} \|a^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \text{où} \quad \|a^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |a^{(k)}(x)|.$$

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathscr{C}_b^m(\mathbb{R}^d)$. Notons $A\colon u \mapsto A(u) = a.u$, l'opérateur de multiplication par a. Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$. Comme $a \in \mathscr{C}_b^m(\mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto |a(x)|$ est bornée dans $\mathbb{R}$, alors $A(u) = au \in L^2(\mathbb{R})$ puisque

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |a(x)u(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} (\sup_{x\in\mathbb{R}}|a(x)|)^2 |u(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|a(x)| \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} = \|a\|_{L^\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \|a\|_{\mathscr{C}_b^m} \|u\|_0$$

   A est donc un opérateur linéaire défini et continu de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

2. Soit $s \in \mathbb{N}$ tel que $s \leq m$ et $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq s$. En utilisant la formule de Leibniz pour la dérivation *du produit des deux fonctions a et u dérivables jusqu'à l'ordre k*, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\frac{d}{dx})^k A(u) = (\frac{d}{dx})^k (a.u) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l (\frac{d}{dx})^{k-l}(a)(x)(\frac{d}{dx})^l(u)(x).$$

   Comme $a \in \mathscr{C}_b^m(\mathbb{R})$, pour tout $l \in \mathbb{N}$ tel que $l \leq k \leq s \leq m$, on a aussi $0 \leq k-l \leq s \leq m$, les fonctions $(\frac{d}{dx})^{k-l}(a)$ sont bornées et on a $\|(\frac{d}{dx})^{k-l}(a)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|a\|_{\mathscr{C}_b^m}$. Comme $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ muni de la topologie induite par $H^s(\mathbb{R})$, et $0 \leq l \leq s$, alors $(\frac{d}{dx})^l(u) \in L^2(\mathbb{R})$, et $\|(\frac{d}{dx})^l(u)\|_0 \leq \|u\|_s$. D'après la première question Les produits de la somme $\frac{d}{dx})^{k-l}(a)(\frac{d}{dx})^l(u)$ sont donc dans $L^2(\mathbb{R})$, avec une norme L^2 inférieure ou égale à $C\|a\|_{\mathscr{C}_b^m}\|u\|_s$. Ceci implique que pour tout entier $k \leq s$, $(\frac{d}{dx})^k A(u)) \in L^2(\mathbb{R})$, et que $A(u) \in H^s(\mathbb{R})$. L'inégalité (1) est donc satisfaite pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ puisque $\|Au\|_s^2 = \sum_{k=0}^{s} \|(au)^{(k)}\|_0^2 \leq \big(2^k \sum_{k=0}^{s}\sum_{l=0}^{k} (C_k^l)^2 \|a\|_{\mathscr{C}_b^m}^2 \|u\|_s^2$.
   Par le principe de densité continuité, l'opérateur A se prolonge (de façon unique) en un opérateur linéaire continu de $H^s(\mathbb{R})$ dans $H^s(\mathbb{R})$ et l'inégalité (1) est satisfaite pour $u \in H^s(\mathbb{R})$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq s \leq m$. Notons B_k le commutateur $B_k := [(\frac{d}{dx})^k, A] := (\frac{d}{dx})^k \circ A - A \circ (\frac{d}{dx})^k$. Soit $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ muni de la topologie induite par $H^s(\mathbb{R})$. Posons $u' = \frac{d}{dx}u$. En utilisant la formule de Leibniz pour la dérivation d'un produit de deux fonctions, on a

$$(\frac{d}{dx})^k A(u') = (\frac{d}{dx})^k (au') = a(\frac{d}{dx})^k u' + \sum_{l=1}^{k} c_l (\frac{d}{dx})^l(a)(\frac{d}{dx})^{k-l}(u'),$$

   ce qui implique que

$$B_k u' = [(\frac{d}{dx})^k, A]u' = (\frac{d}{dx})^k(au') - a(\frac{d}{dx})^k u' = \sum_{l=1}^{k} c_l (\frac{d}{dx})^l(a)(\frac{d}{dx})^{k-l+1}u).$$

   Or, pour $1 \leq l \leq k$, en procédant à un changement d'indice $l-1 = p$ avec $0 \leq p \leq k-1$ on a

$$B_k u' = \sum_{p=0}^{k-1} c_{p+1} (\frac{d}{dx})^{p+1}(a)(\frac{d}{dx})^{k-p}u.$$

   Comme $p+1 \leq k \leq m$, alors $(\frac{d}{dx})^{p+1}a \in L^\infty(\mathbb{R})$, et comme $0 \leq p \leq k-1 \leq s-1$, alors $1 \leq k-p \leq k \leq s$ $(\frac{d}{dx})^{k-p}u \in L^2(\mathbb{R})$. Les produits de la somme sont donc des éléments de $L^2(\mathbb{R})$ en vertu de la question 1. et donc que $B_k u' \in L^2(\mathbb{R})$ et il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant que de k et s) telle que pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$\|B_k(\frac{d}{dx})u\|_0 \leq C\|a\|_{\mathscr{C}_b^m}\|u\|_s.$$

   Par le principe de densité continuité, l'opérateur $B_k(\frac{d}{dx})$ se prolonge (de façon unique) en un opérateur linéaire continu de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et l'inégalité (2) est satisfaite pour $u \in H^s(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction θ_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme composée de deux fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. En outre, comme $\operatorname{supp}\theta \subset [-1,+1]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq \frac{1}{n}$, alors $|nx| \geq 1$ et donc $\theta_n(x) = n\theta(nx) = 0$, ce qui implique que $\operatorname{supp}\theta_n \subset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] = \bar{B}(0, \frac{1}{n})$ compact de $\mathbb{R}$, donc $\theta_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.
   En considérant le changement de variable $y \mapsto \dfrac{y}{n}$ de jacobien égal à $\frac{1}{n}$, on a
   $$\int_{\mathbb{R}} \theta_n(x)dx = n\int_{\mathbb{R}} \theta(nx)dx = n\int_{\mathbb{R}} \theta(n\frac{y}{n})\frac{dy}{n} = \int_{\mathbb{R}} \theta(y)dy = .1$$
   Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Par les propriétés de la régularisée d'une distribution, on sait que $J_n(u) = \theta_n * u$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(\dfrac{d}{dx})^k J_n(u) = (\dfrac{d}{dx})^k\theta_n * u$.
   Pour $x \in \mathbb{R}$, remarquons que $\theta_n(x) = n\theta(nx) = n\sigma_n\theta(x)$ où σ_n est l'opérateur de dilatation d'ordre n et donc pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a en vertu de la relation entre l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$, l'opérateur de dilatation σ_n et l'opérateur de convolution :
   $$\widehat{\theta_n}(\xi) = n\mathscr{F}(\sigma_n(\theta)(\xi) = n.\frac{1}{n}\sigma_{\frac{1}{n}}\hat{\theta}(\xi) = \hat{\theta}(\frac{\xi}{n}) \quad \text{et} \quad \widehat{J_n(u)}(\xi) = \mathscr{F}(\theta_n * u)(\xi) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}(\widehat{\theta_n}.\hat{u})(\xi) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\hat{\theta}(\frac{\xi}{n}).\hat{u}(\xi).$$
   Soit $r \in \mathbb{R}$ arbitraire. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, nous avons
   $$(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}\widehat{J_n(u)}(\xi) = (2\pi)^{1/2}(1+|\xi|^2)^{\frac{r-s}{2}}\sigma_{\frac{1}{n}}\hat{\theta}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{1/2}(1+|\xi|^2)^{\frac{r-s}{2}}\hat{\theta}(\frac{\xi}{n})(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)$$
   Comme la fonction $\hat{\theta} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors $\sigma_{\frac{1}{n}}\hat{\theta} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et donc $(1+|\xi|^2)^{\frac{r-s}{2}}\sigma_{\frac{1}{n}}\hat{\theta} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$.
   Comme$(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$, alors $(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}\widehat{J_n(u)} \in L^2(\mathbb{R})$ comme produit d'une fonction bornée et d'une fonction dans $L^2(\mathbb{R})$ et donc que $J_n(u) \in H^r(\mathbb{R})$, pour tout $r \in \mathbb{R}$. En outre
   $$\|J_n(u)\|_r^2 \leq (2\pi)\big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{\frac{r-s}{2}}|\hat{\theta}(\frac{\xi}{n})|\big)^2\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi = (2\pi)\big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{\frac{r-s}{2}}|\hat{\theta}(\frac{\xi}{n})|\big)^2\|u\|_s^2.$$
   Estimons la norme $\|J_n(u) - u\|_s$.
   $$\|J_n(u) - u\|_s^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s|(2\pi)^{1/2}\hat{\theta}(\frac{\xi}{n}) - 1|^2|\hat{u}(\xi)|^2d\xi.$$
   Remarquons que $(2\pi)^{1/2}\hat{\theta}(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\theta(x)dx = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|(2\pi)^{1/2}\hat{\theta}(\frac{\xi}{n}) - 1| = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(2\pi)^{1/2}|\hat{\theta}.(\frac{\xi}{n})| \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\theta(x)dx = 1$. Comme $(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}|^2 \in L^1(\mathbb{R})$, cela implique que pour tout $n \geq 1$, on a $(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}|^2|(2\pi)^{1/2}\hat{\theta}(\frac{\xi}{n}) - 1|^2 \leq 2(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}|^2$.
   Par application du Théorème de la convergence dominée, on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|J_n(u) - u\|_s = 0$.

2. Soit $a \in \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^d)$. Notons A l'opérateur de multiplication par a. Soit $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie induite par $L^2(\mathbb{R}^d)$. Posons $\quad [J_n, A](u) = J_n(au) - aJ_n(u)$.
   (1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$[J_n, A](u') = \big(\theta_n * au'\big)(x) - a(x)\big(\theta_n * u'\big)(x) = \int_{\mathbb{R}}\theta_n(x-y)\big(a(y) - a(x)\big)u'(y)dy.$$
   (2) Comme $\operatorname{supp}\theta_n \subset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subset [-1, 1]$, et que les fonctions u et u' sont à support compact dans $\mathbb{R}$. Il existe alors $R > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y| \geq R$ on ait $\theta_n(x-y)\big(a(y) - a(x)\big)u'(y) = 0$. En effectuant une intégration par parties dans $[-R, R]$, on obtient
   $$\begin{aligned}[J_n, A]u'(x) &= \int_{-R}^{R}(\frac{d}{dx})\big(\theta_n(x-y)\big)\big(a(x) - a(y)\big)u(y)dy + \int_{-R}^{R}\theta_n(x-y)a'(y)u(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}(\frac{d}{dx})\big(\theta_n(x-y)\big)\big(a(x) - a(y)\big)u(y)dy + \int_{\mathbb{R}}\theta_n(x-y)a'(y)u(y)dy.\end{aligned} \tag{4}$$
   Dans la première intégrale de (4) , en utilisant la formule de Taylor pour la fonction a on a pour tout $y \in \mathbb{R}$
   $$|a(x) - a(y)| = |(x-y)|\int_0^1|(a'(x+t(x-y)|dt \leq \sup_{y\in\mathbb{R}}|a'(y)||x-y| \leq \|a\|_{\mathscr{C}_b^1}|x-y|,$$
   et, en prenant le module
   $$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}|(\frac{d}{dx})\theta_n(x-y)||(a(x) - a(y)||u(y)|dy \leq C\|a\|_{\mathscr{C}_b^1}\int_{\mathbb{R}}|x-y||(\frac{d}{dx}(\theta_n(x-y)||u(y)|dy \\ &= C\|a\|_{\mathscr{C}_b^1}\big(|.||(\frac{d}{dx}\theta_n| * |u|(x)\big).\end{aligned} \tag{5}$$

En prenant le module dans la seconde intégrale de (4), on a
$$\int_{\mathbb{R}} \theta_n(x-y)|a'(y)||u(y)|dy \leq C\|a\|_{\mathscr{C}_b^1}(\theta_n * |u|)(x). \tag{6}$$
Compte tenu des inégalités (5) et (6), en prenant le module de l'expression (4), on conclut qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $n \in]0,1[$, on ait
$$|[J_n, A]u'(x)| \leq C\|a\|_{\mathscr{C}_b^1}\{(|x|(\frac{d}{dx})\theta_n * |u|)(x) + (\theta_n * |u|)(x)\}. \tag{7}$$

(3) À ce stade là on remarque que les fonctions $x \mapsto |x|(\frac{d}{dx})\theta_n(x)$ et θ_n sont dans $L^1(\mathbb{R})$ avec une norme L^1 indépendante de n : après avoir dérivé θ_n et effectué un changement de variable $y \mapsto \frac{y}{n}$:
$$\int_{\mathbb{R}} |x|(\frac{d}{dx})\theta_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} |x|n^2\theta'(nx)dx = \int_{\mathbb{R}} |y|\theta'(y)dy = \||x|\theta'\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \|\theta_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\theta\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1.$$
Sachant que l'opérateur de convolution est continu de $L^1(\mathbb{R}) \ltimes L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, en utilisant l'inégalité de Young, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\|(|x|(\frac{d}{dx})\theta_n * |u|)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \||x|\theta'\|_{L^1(\mathbb{R})}\|u\|_0 \quad \text{et} \quad \|\theta_n * |u|\|_0 \leq \|\theta\|_{L^1}\|u\|_0 = \|u\|_0.$$
Ce qui implique en revenant à (7) que $[J_n, A]u' \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe une constante $C > 0$ *indépendante de* n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ on ait $\|[J_n, A]u'\|_0 \leq C\|a\|_{\mathscr{C}_b^1}\|u\|_0$.

Par le principe de densité continuité, l'opérateur $[J_n, A]\frac{d}{dx}$ se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire (toujours noté) $[J_n, A]\frac{d}{dx}$ continu de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ avec une norme d'opérateur *indépendante de* n, inférieure ou égale à $C\|a\|_{\mathscr{C}_b^1}$ et l'inégalité (3) est vraie pour $u \in L^2(\mathbb{R})$.

(4) Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$, Vérifions que $\lim_{n\to+\infty}\|[J_n, A](\frac{d}{dx}u)\|_0 = 0$. Comme $u' \in L^2(\mathbb{R})$, dans ce cas, alors $Au' = au' \in L^2(\mathbb{R})$ et par le résultat de la question 1. pour $s = 0$ que $\lim_{n\to+\infty}\|J_n(au') - au'\|_0 = 0$.
De même, $J_n(u') \in L^2(\mathbb{R})$, et par le résultat de la question 1. pour $s = 0$ que $\lim_{n\to+\infty}\|J_n(u') - u'\|_0 = 0$. Il s'en suit $aJ_n(u') \in L^2(\mathbb{R})$ et $\lim_{n\to+\infty}\|aJ_n(u') - au'\|_0 \leq \|a\|_{\mathscr{C}_b^1}\lim_{n\to+\infty}\|J_n(u' - u')\|_0 = 0$.
Il s'en suit que si $u \in H^1(\mathbb{R})$: $\lim_{n\to+\infty}\|[J_n, A]u'\|_0 \leq \lim_{n\to+\infty}\|J_n(au') - au'\|_0 + \lim_{n\to+\infty}\|aJ_n(u') - au'\|_0 = 0$.
Soit maintenant $u \in L^2(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la densité de $H^1(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on sait il existe $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R})$ telle que
$$\|u_\varepsilon - u\|_0 < \frac{\varepsilon}{2C\|a\|_{\mathscr{C}_b^1}}, \tag{8}$$
où $C\|a\|_{\mathscr{C}_b^1}$ est la constante de continuité de l'inégalité (3).
On écrit alors
$$[J_n, A]u' = [J_n, A](u' - u'_\varepsilon) + [J_n, A]u'_\varepsilon. \tag{9}$$
Comme $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R})$, nous avons vu que $\lim_{n\to+\infty}\|[J_n, A]u'_\varepsilon\|_0 = 0$ et donc il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait
$$\|[J_n, A]u'_\varepsilon\|_0 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$
Par ailleurs, comme $u - u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$, nous avons vu à la question (3) que pour $n \geq n_0$
$$\|[J_n, A](u' - u'_\varepsilon)\|_0 \leq C\|a\|_{\mathscr{C}_b^1}\|(u - u_\varepsilon)\|_0 < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{11}$$
après avoir appliqué l'estimation (8).
Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, compte tenu de (9), (10) et (11), on a
$$\|[J_n, A]u'\|_0 \leq \|[J_n, A](u' - u'_\varepsilon)\|_0 + \|[J_n, A]u'_\varepsilon\|_0 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
ce qui signifie que que $\lim_{n\to+\infty}\|[J_n, A]u'\|_0 = 0$, pour $u \in L^2(\mathbb{R})$.

[2]

---

2. *Barème de Notation sur 20 points* :
Exercice 1. : 1. : *0.5 points*, 2. : *3 points*, 3. *3 points*.
Exercice 2. : 1. : *4 points*, 2.(1) : *1 points*, 2.(2) : *3 points*, 2.(3) : *3 points*, 2.(4). : *3 points*. *Le Chargé de la Matière : Mokrane A.Z.*