Corrigé type.
Examen final-Analyse Complexe-

Exercice 1. 5 points.

1) $f(z)=\frac{z-2}{|z|^2}=\frac{x+iy-2}{x^2+y^2}=\frac{x-2}{x^2+y^2}+i\frac{y}{x^2+y^2}$...... $(0,25)$ point

$P(x,y)=\frac{x-2}{x^2+y^2}$.......... $(0,75)$ point, $Q(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$........ $(0,75)$ point

2) $\frac{\partial}{\partial x}P(x,y)=\frac{y^2-x^2+4x}{(x^2+y^2)^2}$........... $(0,25)$, $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{-2y(x-2)}{(x^2+y^2)^2}$....... $(0,25)$,

$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$...... $(0,25)$, $\frac{\partial}{\partial y}Q(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$..... $(0,25)$

3) Remarquons que : $\frac{\partial}{\partial x}P(x,y)\neq\frac{\partial}{\partial y}Q(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)\neq-\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)$, c-à-d que P et Q ne vérifient pas les conditions de Cauchy-Riemann,....... $(0,5)$, alors f n'est pas analytique pour tout $z\in\mathbb{C}^*$....... $(0,5)$

4) $\int_\gamma f(z)dz=\int_0^\pi f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$....... $(0,5)$

$=\int_0^\pi \frac{e^{it}-2}{|e^{it}|^2}ie^{it}dt$............ $(0,25)$

$=i\int_0^\pi e^{2it}dt-2i\int_0^\pi e^{it}dt$.......... $(0,25)$

$=i\,\frac{1}{2i}e^{2it}\Big|_0^\pi-2i\,\frac{1}{i}e^{it}\Big|_0^\pi=\frac{1}{2}\left(e^{2i\pi}-e^0\right)-2\left(e^{i\pi}-e^0\right)$.............. $(0,25)$

$=\frac{1}{2}\left(\cos 2\pi+i\sin 2\pi-1\right)-2\left(\cos\pi+i\sin\pi-1\right)$

$=\frac{1}{2}(1-1)-2(-1-1)=4$.................$(0,25)$

Exercice 2. 8 points.

a) intérrogation (6 points$\times 2$ = une note sur 12+la note du devoir sur 8)

Les points singuliers de f sont $z_1=2$ et $z_2=-2$.

Représentation graphique de γ et des points $z_1$et z_2 dans le plan complexe, où γ et le cercle de centre (-2, 0) de rayon 1, c-à-d: $(x+2)^2+y^2=1$............ (1).

On a $|z_1+2|=|2+2|=4>1\Rightarrow z_1\notin\gamma$........... $(0,5)$

et $|z_2+2|=|-2+2|=0<1\Rightarrow z_2\in\gamma$............$(0,5)$.

Donc $\exists g: z\mapsto g(z)=\frac{e^z}{z-2}$ analytique sur $\mathbb{C}-\{2\}$............$(1,5)$

tq:$\int_{|z+2|=1}\frac{e^z}{(z-2)(z+2)}dz=\int_{|z+2|=1}\frac{g(z)}{z+2}dz$............$(1)$

ici $z_2=-2$ et $n=0$, donc en appliquant la formule intégrale de Cauchy on obtient:

$$\begin{aligned}\int_{|z+2|=1}\frac{e^z}{(z-2)(z+2)}dz &= 2i\pi g(-2)......(1)\\ &= \frac{-i\pi}{2e^2}........(0,5)\end{aligned}$$

b) On a $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Rightarrow e^{z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}$............$(0,5)$

$e^{z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}=1+z^2+\frac{z^4}{2}+\frac{z^6}{6}+...+...$ ......$(0,5)$

$\frac{1-e^{z^2}}{z^5}=-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z}-\frac{1}{6}z-...-...$ ....(0,5)

Res(f, 0)$=-\frac{1}{2}$.................$(0,5)$.

Exercice 3. 7 points.

1) On a $\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}$..........$(0,5)$.

Donc $f(t)=\frac{1}{a+\frac{z^2-1}{2iz}}=\frac{2iz}{z^2+2iaz-1}$............(1)

2) $\Delta=4(1-a^2)$

$z_1=-ai-\sqrt{1-a^2}$.....$(0,5)$ et $z_2=-ai+\sqrt{1-a^2}$.........$(0,5)$.

$\lim\limits_{z\to z_1} g(z)=\infty$ et $\lim\limits_{z\to z_1}(z-z_1)g(z)=$constante................(0,25)

$\lim\limits_{z\to z_2} g(z)=\infty$ et $\lim\limits_{z\to z_2}(z-z_2)g(z)=$constante................(0,25)

3) Donc z_1 est un pôle simple pour g,

et $\text{Res}(g,\, z_1)=\lim\limits_{z\to z_1}(z-z_1)g(z)=\frac{-1}{\sqrt{1-a^2}}$ où $0<a<1$, ...$(0,5)$

z_2 est un pôle simple pour g,

et $\text{Res}(g,\, z_2)=\lim\limits_{z\to z_2}(z-z_2)g(z)=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$..........$(0,5)$.

La représentation graphique de γ (le rectangle) dans le plan complexe avec les points z_1 et z_2............$(0,25)$.

où $z_1\notin\gamma$............$(0,25)$ et $z_2\in\gamma$............$(0,25)$.

4) En appliquant le théorème des résidus on trouve que:

$\int_\gamma g(z)dz=2i\pi\text{Res}(g,\, z_2)$............$(0,5)$,

$\qquad=\frac{2i\pi}{\sqrt{1-a^2}}$......$(0,25)$

5) $\int_\gamma f(t)dt=\int_\gamma \frac{2iz}{z^2+2iaz-1}dt$,

où $z=e^{it}\Rightarrow dz=ie^{it}dt$ donc $dt=\frac{dz}{ie^{it}}=\frac{dz}{iz}$............$(0,5)$.

d'où

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(t)dt &= \int_\gamma \frac{2iz}{z^2+2iaz-1}\frac{dz}{iz}\\ &= \int_\gamma \frac{2}{z^2+2iaz-1}dz\\ &= \int_\gamma g(z)dz=\frac{2i\pi}{\sqrt{1-a^2}}....(1).\end{aligned}$$