Examen Final

Exercice 1. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})()$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons

$$\varphi_n(x) = n\Big(\varphi(x + \frac{1}{n}) - \varphi(x)\Big).$$

1. Prouver que la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\xi \in \mathbb{R}$, calculer $\mathscr{F}(\varphi_n)(\xi) = \hat{\varphi}_n(\xi)$ en fonction de $\hat{\varphi}(\xi)$.
2. Posons pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$$\psi_n(\xi) = n\Big(\exp(\frac{i\xi}{n}) - 1\Big) - i\xi.$$
   (1) Prouver que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad |\psi_n(\xi)| \leq \dfrac{\xi^2}{n}.$

   (2) Prouver que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad |\psi_n'(\xi)| \leq \dfrac{|\xi|}{n}.$

   (3) Prouver que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ $\;k \geq 2$ $\quad |\psi_n^{(k)}(\xi)| \leq \dfrac{1}{n^{k-1}}.$
3. Posons pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$$\alpha_n(\xi) = \psi_n(\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$
   Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers la fonction nulle 0 au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.
4. En déduire que la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers la fonction φ' au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.
5. Soit $x, \xi \in \mathbb{R}$. Posons $e_x(\xi) = e_\xi(x) := \exp(ix\xi)$. Prouver que pour tout $x_1, x_2, \xi \in \mathbb{R}$, on a
$$|e_\xi(x_1) - e_\xi(x_2)| \leq |x_1 - x_2||\xi|.$$
6. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $y \in \mathbb{R}$:
$$G_x(\varphi)(y) := \tau_x \mathscr{R}\varphi(y) = \varphi(x - y).$$
   Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $G_x(\varphi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathscr{F}\Big((\frac{d}{dx})^k G_x(\varphi)\Big)$ en fonction de $\hat{\varphi}$ et de x.
7. Soit $x \in \mathbb{R}$ et une suite $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \quad (\mathbb{R})$.
   Prouver que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n := \mathscr{F}(G_{x_n}(\varphi))$ est convergente vers la fonction $g := \mathscr{F}(G_x(\varphi))$ au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})(\mathbb{R})$.
8. En déduire que l'application $x \to G_x(\varphi)$ est séquentiellement continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})(\mathbb{R})$.
9. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons
$$u * \varphi(x) := \langle u, \tau_x \mathscr{R}\varphi\rangle. \tag{1}$$
   Montrer que l'expression (1) définit un fonction $u * \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue dans $\mathbb{R}$.
10. Montrer, en utilisant la question 4. que la fonction $u * \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et que
$$\frac{d}{dx}(u * \varphi) = u * \varphi'.$$
11. En déduire que $u * \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\quad (\dfrac{d}{dx})^k(u * \varphi) = u * \varphi^{(k)}.$

Exercice 2. Soient donnés $p \in [1, +\infty[$ et $N \in \mathbb{R}_+^*$. Soit g une fonction mesurable dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(1 + |x|^2)^{-N} g(x)|^p dx := C_p < +\infty.$$

1. Prouver que $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.
2. Soit T_g la distribution associée à g. Prouver $T_g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Indication.

- Traiter d'abord le cas $p = 1$.
- Pour le cas $p > 1$, utiliser en 1) et 2) l'Inégalité de Hölder.

- Utiliser la formule multi-nomiale de Newton : Si $m \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$ alors
$$(1+|x|^2)^m = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha x^{2\alpha} \quad \text{où} \quad c_\alpha = \frac{m!}{\alpha!(m-|\alpha|)!}.$$

Corrigé de l'Exercice 1.

1. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi_n = n\tau_{\frac{-1}{n}}\varphi - \varphi$ où τ_a est l'opérateur de translation d'ordre $a \in \mathbb{R}$ qui est continu de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons vu en cours que $p_k(\tau_a\varphi) \le p_k(\varphi)$. En appliquant ceci à $a = -\frac{1}{n}$ on voit que $n\tau_{\frac{-1}{n}}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et donc que $\varphi_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Calculons $\widehat{\varphi_n}(\xi)$ en un point $\xi \in \mathbb{R}$.
Nous avons vu en cours que $\mathscr{F}(\tau_a\varphi)(\xi) = e_{-a}(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = \exp(-ia\xi)\varphi(\xi)$, pour $a \in \mathbb{R}$. Donc pour $a = -\frac{1}{n}$ on a
$$\widehat{\varphi_n}(\xi) = n\Big(\mathscr{F}(\tau_{\frac{-1}{n}}\varphi)(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)\Big) = n\Big(\exp(\frac{i\xi}{n})\hat{\varphi}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)\Big) = n\Big(\exp(\frac{i\xi}{n}) - 1\Big)\hat{\varphi}(\xi).$$

2. Posons pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$$\psi_n(\xi) = n\Big(\exp(\frac{i\xi}{n}) - 1\Big) - i\xi.$$
On remarque que ψ_n est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}$, que $\psi_n(0) = 0$. De même $\psi'(\xi) = i\exp(\frac{i\xi}{n}) - i$, et donc $\psi_n(0) = 0$.
   (1) En appliquant la formule de Taylor jusqu'à l'ordre 2 en $\xi = 0$ pour la fonction ψ_n, nous avons
$$\psi_n(\xi) = \psi_n(0) + \xi\psi_n'(0) + \xi^2\int_0^1 (1-t)\psi_n''(t\xi)dt = \xi^2\int_0^1 (1-t)(-\frac{1}{n})\exp(\frac{it\xi}{n})dt.$$
   Il s'en suit que $$|\psi_n(\xi)| \le \frac{\xi^2}{n}\int_0^1 (1-t)|\exp(\frac{it\xi}{n})|dt \le \frac{\xi^2}{n}\int_0^1 (1-t)dt = \frac{\xi^2}{2n} < \frac{\xi^2}{n}.$$
   (2) De même, en appliquant la formule de Taylor jusqu'à l'ordre 1 en $\xi = 0$ pour la fonction ψ_n', nous avons
$$\psi_n'(\xi) = \psi_n'(0) + \xi\int_0^1 \psi_n''(t\xi)dt = \xi\int_0^1 (-\frac{1}{n})\exp(\frac{it\xi}{n})dt.$$
   Il s'en suit que $$|\psi_n'(\xi)| \le \frac{|\xi|}{n}\int_0^1 |\exp(\frac{it\xi}{n})|dt \le \frac{|\xi|}{n}\int_0^1 dt = \frac{|\xi|}{n}.$$
   (3) On remarque que $\psi_n^{(2)}(\xi) = \frac{(i)^2}{n}\exp(\frac{i\xi}{n})$ et donc par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$ nous avons
   $\psi_n^{(k)}(\xi) = \frac{(i)^k}{n^{k-1}}\exp(\frac{i\xi}{n})$ et par conséquent $\quad |\psi_n^{(k)}(\xi)| \le \frac{1}{n^{k-1}}.$

3. Posons pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \alpha_n(\xi) = \psi_n(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$. Soit $m, p, l \in \mathbb{N}$ tels que $k + l \le m$. Évaluons $|\xi|^l|\alpha_n^{(p)}(\xi)|$.
Par la formule de Leibniz nous avons
$$\alpha_n^{(p)}(\xi) = (\frac{d}{d\xi})^p(\psi_n\hat{\varphi})(\xi) = \sum_{k=0}^{p} C_k^p\psi_n^{(k)}(\xi)\hat{\varphi}^{(p-k)}(\xi) = \psi_n(\xi)\varphi^{(p)}(\xi) + p\psi_n'(\xi)\hat{\varphi}^{(p-1)}(\xi) + \sum_{k=2}^{p} C_k^p\psi_n^{(k)}(\xi)\hat{\varphi}^{(p-k)}(\xi).$$
En utilisant les estimations des points (1),(2) et (3) de la question 2. on a
$$|\alpha_n^{(p)}(\xi)| \le \frac{|\xi|^2}{n}|\hat{\varphi}^{(p)}(\xi)| + p\frac{|\xi|}{n}|\hat{\varphi}^{(p-1)}(\xi)| + \sum_{k=2}^{p} C_k^p\frac{1}{n^{k-1}}|\hat{\varphi}^{(p-k)}(\xi)|.$$
et donc
$$|\xi|^l|\alpha_n^{(p)}(\xi)| \le \frac{|\xi|^{l+2}}{n}|\hat{\varphi}^{(p)}(\xi)| + p\frac{|\xi|^{l+1}}{n}|\hat{\varphi}^{(p-1)}(\xi)| + \sum_{k=2}^{p} C_k^p\frac{|\xi|^l}{n^{k-1}}|\hat{\varphi}^{(p-k)}(\xi)|.$$
Comme $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et par définition des semi-normes $p_m(\hat{\varphi})$ avec $p + l \le m$ on a
$$|\xi|^{l+2}|\hat{\varphi}^{(p)}(\xi)| \le p_{m+2}(\hat{\varphi}), \quad |\xi|^{l+1}|\hat{\varphi}^{(p-1)}(\xi)| \le p_m(\hat{\varphi}), \quad |\xi|^l|\hat{\varphi}^{(p-k)}(\xi)| \le p_m(\hat{\varphi}) \quad l + (p-k) \le m, \quad 2 \le k \le p.$$
Finalement comme $k \ge 2$ alors $\frac{1}{n^{k-1}} \le \frac{1}{n}$ et si on pose $C := \sum_{k=0}^{p} C_k^p$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $l, p \in \mathbb{N}$ tels que $l + p \le m$
$$|\xi|^l|\alpha_n^{(p)}(\xi)| \le \frac{C}{n}p_{m+2}(\hat{\varphi}),$$
et en prenant la borne supérieure sur tous les $\xi \in \mathbb{R}$ et les entiers l, p tels que $l + p \le m$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$p_m(\alpha_n) = \max_{l+p\le m}\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\xi|^l|\alpha_n^{(p)}(\xi)|\Big) \le \frac{C}{n}p_{m+2}(\hat{\varphi}),$$

et par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ on obtient que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} p_m(\alpha_n) = 0.$, ce qui signifie que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers la fonction nulle 0 au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

4. Nous avons vu que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ $\widehat{\varphi_n}(\xi) = n\Big(\exp(\frac{i\xi}{n}) - 1\Big)\hat{\varphi}(\xi) = \psi_n(\xi)\hat{\varphi}(\xi) + i\xi\hat{\varphi}(\xi)$, or on sait que $i\xi\hat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi'}(\xi)$, par conséquent

$$\mathscr{F}\Big(\varphi_n - \varphi'\Big) = \widehat{\varphi_n}(\xi) - \widehat{\varphi'}(\xi) = \psi_n(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = \alpha_n(\xi).$$

Comme l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ est un isomorphisme dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})(\mathbb{R})$ et que suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers la fonction nulle 0 au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, par l'isomorphisme inverse $\mathscr{F}^{-1}$,

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\varphi_n - \varphi') = \alpha_n &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad (\mathscr{S}(\mathbb{R})) \\ \varphi_n - \varphi' = \mathscr{F}^{-1}(\alpha_n) &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad (\mathscr{S}(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

la suite $(\varphi_n - \varphi')_{n\geq 1}$ est convergente vers la fonction nulle 0 au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, donc la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers la fonction φ' au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

5. Soient $x, \xi \in \mathbb{R}$. Posons $e_x(\xi) = e_\xi(x) := \exp(ix\xi)$. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1 aux points x_1 et x_2 à la fonction e_ξ on a

$$e_\xi(x_1) = e_\xi(x_2) + (x_1 - x_2)\int_0^1 e'_\xi(x_2 + t(x_1 - x_2))dt,$$

or $e'_\xi(x) = i\xi\exp(i\xi x)$, alors

$$|e_\xi(x_1) - e_\xi(x_2)| \leq |x_1 - x_2||\xi|\int_0^1 |\exp(i\xi(x_2 + t(x_1 - x_2)))|dt = |x_1 - x_2||\xi|.$$

6. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$. On sait que $\mathscr{R}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et donc que $G_x(\varphi) = \tau_x\mathscr{R}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a pour $\xi \in \mathbb{R}$ en vertu des règles de la transformation de Fourier en relation avec les opérateurs de dérivation, de translation et de réflexion vues en cours :

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(G_x(\varphi))(\xi) &= \mathscr{F}(\tau_x\mathscr{R}\varphi)(\xi) = e_{-x}(\xi)\mathscr{F}(\mathscr{R}\varphi)(\xi) = e_{-x}(\xi)\mathscr{R}\hat{\varphi}(\xi), \\ \mathscr{F}\Big((\frac{d}{dy})^k G_x(\varphi)\Big)(\xi) &= (i)^k\xi^k\mathscr{F}(G_x(\varphi)(\xi) = (i)^k\xi^k e_{-x}(\xi)\mathscr{R}\hat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

7. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n = \widehat{G_{x_n}(\varphi)} = e_{-x_n}\mathscr{R}\widehat{\varphi}$ et $g = \widehat{G_x(\varphi)} = e_{-x}\mathscr{R}\widehat{\varphi}$, sachant que la suite $(x_n)_n$ est convergente vers x dans $\mathbb{R}$. Prouvons que la suite $(g_n)_n$ est convergente vers la fonction g au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Soit $m, l, p \in \mathbb{N}$ tels que $l + p \leq m$ et $\xi \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Leibniz,

$$|\xi|^l g^{(p)}(\xi) = |\xi|^l\sum_{k=0}^{p} C_p^k e_{-x}^{(k)}(\xi)(-1)^{p-k}\hat{\varphi}^{(p-k)}(-\xi) \quad \text{et} \quad e_{-x}^{(k)}(\xi) = (-i)^k x^k e_x(\xi), \quad \text{d'où}$$

$$|\xi|^l|g_n^{(p)}(\xi) - g^{(p)}(\xi)| \leq |\xi|^l\sum_{k=0}^{p} C_p^k|x_n^k e_{-x_n}(\xi) - x^k e_{-x}(\xi)||\hat{\varphi}^{(p-k)}(-\xi)|,$$

on écrit $|x_n^k e_{-x_n}(\xi) - x^k e_{-x}(\xi)| \leq |x_n^k e_{-\xi}(x_n) - x^k e_{-\xi}(x_n)| + |x^k e_{-\xi}(x_n) - x^k e_{-\xi}(x)| = |x_n^k - x^k| + |x|^k|e_{-\xi}(x_n) - e_{-\xi}(x)|$, et en utilisant la question 5. on a

$$|\xi|^l|g_n^{(p)}(\xi) - g^{(p)}(\xi)| \leq \sum_{k=0}^{p} C_p^k|x_n^k - x^k||\xi|^l|\hat{\varphi}^{(p-k)}(-\xi)| + \sum_{k=0}^{p} C_p^k|x_n - x||\xi|^{l+1}|\hat{\varphi}^{(p-k)}(-\xi)|.$$

Or, dans les deux sommes on remarque que pour $0 \leq k \leq p$ on a $(p-k) + l \leq m$ donc $|\xi|^l|\hat{\varphi}^{(p-k)}(-\xi)| \leq p_m(\hat{\varphi}) \leq p_{m+1}(\hat{\varphi})$ et $|\xi|^{l+1}|\hat{\varphi}^{(p-k)}(-\xi)| \leq p_{m+1}(\hat{\varphi})$. Il s'en suit que

$$|\xi|^l|g_n^{(p)}(\xi) - g^{(p)}(\xi)| \leq \sum_{k=0}^{p} C_p^k\Big(|x_n^k - x^k| + |x_n - x|\Big)p_{m+1}(\hat{\varphi}),$$

et en prenant la borne supérieure sur tous les $\xi \in \mathbb{R}$ et les entiers l, p tels que $l + p \leq m$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$p_m(g_n - g) = \max_{l+p\leq m}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\xi|^l|g_n^{(p)}(\xi) - g^{(p)}(\xi)| \leq \sum_{k=0}^{p} C_p^k\Big(|x_n^k - x^k| + |x_n - x|\Big)p_{m+1}(\hat{\varphi}),$$

Comme la fonction $x \mapsto x^k$ est continue dans $\mathbb{R}$, on sait que si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \quad (\mathbb{R})$ alors $x_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^k \quad (\mathbb{R})$ et donc, par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(|x_n^k - x^k| + |x_n - x|\big) = 0$, on voit que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} p_m(g_n - g) \le \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} C_p^k \big(|x_n^k - x^k| + |x_n - x|\big) p_{m+1}(\hat{\varphi}) = 0,$$

ce qui montre que la suite la suite $(g_n)_n$ est convergente vers la fonction g au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

8. Comme l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ est un isomorphisme dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et que suite $(g_n = \mathscr{F}(G_{x_n}\varphi))_{n\ge0}$ est convergente vers la fonction $g = \mathscr{F}(G_x(\varphi))$ au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, par l'isomorphisme inverse $\mathscr{F}^{-1}$, la suite $(G_{x_n}(\varphi)_{n\ge0}$ est convergente vers la fonction $G_x(\varphi)$ au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, dés que la suite $(x_n)_{n\ge0}$ est convergente vers x au sens de la topologie de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \quad (\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}(G_{x_n}\varphi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathscr{F}(G_x(\varphi)) \qquad (\mathscr{S}(\mathbb{R})) \\ \Rightarrow \quad & G_{x_n}\varphi = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(G_{x_n}\varphi)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(G_x\varphi)) = G_x(\varphi) \qquad (\mathscr{S}(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

ce qui signifie que l'application $x \mapsto G_x(\varphi)$ est séquentiellement continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

9. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons

$$u * \varphi(x) := \langle u, \tau_x \mathscr{R}\varphi \rangle. \tag{1}$$

l'expression (1) définit bien un fonction $u * \varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ puisque pour chaque $x \in \mathbb{R}$, nous avons vu que $\tau_x\mathscr{R}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et donc, comme u est une distribution tempérée, que $\langle u, \tau_x\mathscr{R}\varphi\rangle$ définit un unique nombre complexe qu'on notera $u * \varphi(x)$. Soit une suite $(x_n)_{n\ge0}$ convergente vers x au sens de la topologie de $\mathbb{R}$, nous venons de voir que la suite $(\tau_{x_n}\mathscr{R}\varphi)_n)_n$ est convergente vers la fonction $\tau_x\mathscr{R}\varphi$ au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. et comme u est séquentiellement continue de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$, la suite $(\langle u, \tau_{x_n}\mathscr{R}\varphi\rangle)_n$ est convergente vers le nombre complexe $\langle u, \tau_x\mathscr{R}\varphi\rangle$, ce qui signifie que la suite $(u*\varphi(x_n))_n$ est convergente vers le nombre complexe $u*\varphi(x)$ dans $\mathbb{C}$, d'où la continuité de la fonction $u * \varphi$.

10. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $0 < \varepsilon < 1$. Évaluons le quotient différentiel par linéarité de u, on a

$$\frac{u * \varphi(x+\varepsilon) - u * \varphi(x)}{\varepsilon} = \langle u, \frac{\tau_{(x+\varepsilon)}\mathscr{R}\varphi - \tau_x\mathscr{R}\varphi}{\varepsilon} \rangle,$$

avec ε jouant le rôle de $\frac{1}{n}$, la question 4. montre que la suite $(\dfrac{\tau_{(x+\varepsilon)}\mathscr{R}\varphi - \tau_x\mathscr{R}\varphi}{\varepsilon})_{0<\varepsilon<1}$ est convergente vers la fonction $\tau_x\mathscr{R}\varphi'$ au sens de la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Comme u est continue dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, on voit que

$$\lim_{\varepsilon\to0} \frac{u * \varphi(x+\varepsilon) - u * \varphi(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0} \langle u, \frac{\tau_{(x+\varepsilon)}\mathscr{R}\varphi - \tau_x\mathscr{R}\varphi}{\varepsilon} \rangle = \langle u, \tau_x\mathscr{R}\varphi'\rangle = u * \varphi'(x)$$

donc la fonction $u * \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{d}{dx}(u * \varphi)(x) = u * \varphi'(x).$$

11. Come $\varphi' \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ alors ce qui précède appliqué à la fonction $\varphi' \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ montre que $u * \varphi'$ est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et donc pour $x \in \mathbb{R}$ $(\dfrac{d}{dx})(u * \varphi')(x) = u * \varphi''(x)$. Par conséquent, on en déduit que $u * \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ et

$$(\frac{d}{dx})^{(2)}(u * \varphi)(x) = \frac{d}{dx}\Big((\frac{d}{dx})(u * \varphi)\Big)(x) = \frac{d}{dx}(u * \varphi')(x) = u * \varphi''(x).$$

Par récurrence sur l'ordre de dérivation $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $u * \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$(\frac{d}{dx})^k(u * \varphi)(x) = u * \varphi^{(k)}(x).$$

Corrigé de l'Exercice 2. Soient donnés $p \in [1, +\infty[$ et $N \in \mathbb{R}_+^*$. Soit g une fonction mesurable dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(1 + |x|^2)^{-N} g(x)|^p \, dx := C_p < +\infty.$$

1. Prouvons que $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Nous devons prouver que pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^d$, on a $g.\mathbf{1}_K \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
   - Cas où $p = 1$. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. On écrit pour $pp.x \in \mathbb{R}^d$:

$$g(x)\mathbf{1}_K(x) = (1 + |x|^2)^{-N} g(x).(1 + |x|^2)^N \mathbf{1}_K(x),$$

Par hypothèse, la fonction $x \mapsto (1+|x|^2)^{-N}.g(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et la fonction $x \mapsto (1+|x|)^2)^N \mathbf{1}_K(x)$, est continue sur le compact K, donc bornée sur ce compact qui est de mesure finie, et atteint sa borne supérieure sur K, alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)|\mathbf{1}_K(x)|dx \leq \sup_{x\in K}(1+|x|^2)^N \int_{\mathbb{R}^d} |(1+|x|^2)^{-N} g(x)|dx < +\infty.$$

ce qui implique que pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^d$ $g.\mathbf{1}_K \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et donc $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

- Cas où $p > 1$. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. On a par hypothèse que la fonction

$$x \mapsto f(x) := (1+|x|^2)^{-N} g(x) \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Soit q le nombre conjugué de p :($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). On remarque que la fonction $x \mapsto h(x) = (1+|x|^2)^N \mathbf{1}_K(x) \in L^q(\mathbb{R}^d)$ car la fonction $x \mapsto (1+|x|^2)^{qN}\mathbf{1}_K(x)$, est continue sur le compact K, donc bornée sur ce compact, qui est de mesure finie

$$\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^q dx = \int_{\mathbb{R}^d} |(1+|x|^2)^{qN}\mathbf{1}_K^q(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d} |(1+|x|^2)^{qN}\mathbf{1}_K(x)|dx \leq \sup_{x\in K}(1+|x|^2)^{qN} mes(K) < +\infty,$$

et par application de l'inégalité de Hölder

$$g\mathbf{1}_K = h.f \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

ce qui implique que pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^d$ $g.\mathbf{1}_K \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et donc $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

2. Soit T_g la distribution associée à la fonction $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On sait que $T_g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et est définie pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle T_g, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\varphi(x)dx.$$

Prouvons que T_g est continue sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, muni de la topologie induite par $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

- Cas où $p = 1$. On écrit pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > N$ et en utilisant la formule multi-nômiale de Newton sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, nous avons $\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha x^{2\alpha}|\varphi(x)| \leq Cp_{2m}(\varphi)$ avec $C = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha$.

$$|\langle T_g,\varphi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|(1+|x|^2)^{-N}(1+|x|^2)^N|\varphi(x)|(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|(1+|x|^2)^{-N}(1+|x|^2)^m|\varphi(x)|(x)dx$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|(1+|x|^2)^{-N} x^{2\alpha}|\varphi(x)|(x)dx \leq Cp_{2m}(\varphi)\int_{\mathbb{R}^d} |g(x|(1+|x|^2)^{-N} dx = CC_1 p_{2m}(\varphi)$$

Ce qui implique que T_g est continue sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, muni de la topologie induite par $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et donc définit un élément de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

- Cas où $p > 1$. On écrit pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > N$ et en utilisant la formule multinomiale de Newton :

$$|\langle T_g,\varphi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|(1+|x|^2)^{-N}(1+|x|^2)^N|\varphi(x)|(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|(1+|x|^2)^{-N}(1+|x|^2)^{N-m}(1+|x|^2)^m|\varphi(x)|(x)dx$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|(1+|x|^2)^{-N}(1+|x|^2)^{N-m}x^{2\alpha}|\varphi(x)|(x)dx$$

Soit q le nombre conjugué de p :($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). Dans le but d'utiliser l'inégalité de Hölder, on choisit l'entier m de telle façon que la fonction $x \mapsto (1+|x|^2)^{N-m} \in L^q(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire qu'il faut choisir m tel que $(2(m-N)q > d)$ ou encore que $m > N + \frac{d}{2q}$. Comme $q > 1$, il suffit de choisir $m > N + \frac{d}{2}$. Alors par application de l'inégalité de Hölder on a

$$|\langle T_g,\varphi\rangle| \leq Cp_{2m}(\varphi)\int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^{-N} g(x).(1+|x|^2)^{N-m}dx \leq Cp_{2m}(\varphi)\|(1+|.|^2)^{-N}g\|_{L^p}.\|(1+|.|^2)^{N-m}\|_{L^q} = C_p^{1/p}C_q^{1/q}Cp_{2m}(\varphi).$$

avec $C_q = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^{(N-m)q}dx$ et $m > N + \frac{d}{2}$.

Ce qui implique que T_g est continue sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, muni de la topologie induite par $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et donc définit un élément de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Barème :

Exercice 1 :1.(2pts) - 2.(1) (1pt), (2) (1pt), (3) (1pt) -3.(3pts) .4.(1pt).5. (1pt). 7. (2pts). 8.(1pt).9. (1pt).10. (1pt). 11. (1pt)

Exercice 2 :1.(2pts). 2.(2pts)