EXAMEN FINAL

Énoncé et Corrigé.

Exercice. [1] Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $\operatorname{sgn}(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Vérifier que $T_{\operatorname{sgn}} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = \operatorname{sgn}(x)\mathbf{1}_{[-n,+n]}(x)$.
   Prouver que $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer $\mathscr{F}(g_n) = \widehat{g_n}$.
2. Prouver que la suite de distributions tempér'ees $(T_{g_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la distribution T_{sgn} au sens de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, c'est à dire que pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_{g_n}, \varphi\rangle = \langle T_{\operatorname{sgn}}, \varphi\rangle.$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose
$$f_n(x) = \frac{1-\cos(2n\pi x)}{\pi x}. \tag{1}$$
   Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression (1) définit une fonction $f_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ et que la distribution associée $T_{f_n} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,
$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle \frac{1}{\pi} vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = -\int_{[-1,+1]} \frac{\cos(2\pi nx)(\varphi(x)-\varphi(0))}{\pi x}dx - \int_{|x|\geq 1} \frac{\cos(2\pi nx)\varphi(x)}{\pi x}dx$$
   En déduire que la suite de distributions temperées $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers la distribution $\frac{1}{\pi}vp(\frac{1}{x})$ au sens de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
5. En déduire la limite de la suite de distributions tempérées $\big(\mathscr{F}(T_{g_n})\big)_{n\geq 1}$ au sens de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ et en déduire ensuite la valeur de $\mathscr{F}(T_{\operatorname{sgn}}) \quad (\mathscr{S}'(\mathbb{R}))$.

<u>*Barème*</u> :
0. (1 point), 1. (4 points), 2. (3 points), 3. (3 points), 4. (2+3 points), 5. (4 points).

1.
- On désigne par $\mathscr{F}$ l'opérateur de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
- Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on désigne par T_f la distribution associée à f.
- On rappelle que la distribution tempérée $vp(\frac{1}{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ est définie pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ par
$$\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \int_{[-1,+1]} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_{\{x\in\mathbb{R}:\,|x|\geq 1\}} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $\operatorname{sgn}(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Alors $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$ et $|\operatorname{sgn}(x)| = \dfrac{|x|}{|x|} = 1$. Ceci implique que fonction $\operatorname{sgn} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et que $\operatorname{sgn} \notin L^1(\mathbb{R})$. C'est une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à croissance lente. Donc la distribution associée $T_{\operatorname{sgn}} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = \operatorname{sgn}(x)\mathbf{1}_{[-n,+n]}(x)$. Alors $|g_n(x)| = \mathbf{1}_{[-n,+n]}(x)$ et donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|dx = \int_{-n}^{n} 1dx = 2n$.
   La fonction $g_n \in L^1(\mathbb{R})$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Calculons $\mathscr{F}(g_n)(\xi) = \widehat{g_n}(\xi)$.
   Pour $\xi = 0$, on a
   $$\widehat{g_n}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x.0} g_n(x)dx = \int_{-n}^{n} \frac{x}{|x|}dx = -\int_{-n}^{0} dx + \int_{0}^{n} dx = -n + n = 0.$$
   Pour $\xi \neq 0$, on a
   $$\begin{aligned}\widehat{g_n}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x.\xi} g_n(x)dx = \int_{-n}^{n} e^{-2i\pi x.\xi}\frac{x}{|x|}dx = -\int_{-n}^{0} e^{-2i\pi x.\xi}dx + \int_{0}^{n} e^{-2i\pi x.\xi}dx \\ &= -[-\frac{1}{2i\pi\xi}e^{-2i\pi x\xi}]_{x=-n}^{x=0} + [-\frac{1}{2i\pi\xi}e^{-2i\pi x\xi}]_{x=0}^{x=n} \\ &= -\left(-\frac{1}{2i\pi\xi} + \frac{e^{2i\pi n\xi}}{2i\pi\xi}\right) + \left(-\frac{e^{-2i\pi n\xi}}{2i\pi\xi} + \frac{1}{2i\pi\xi}\right) \\ &= \frac{1}{i\pi\xi} - \frac{1}{i\pi\xi}\left(\frac{e^{2i\pi n\xi} + e^{-2i\pi n\xi}}{2}\right) = \frac{1-\cos(2\pi n\xi)}{i\pi\xi}.\end{aligned}$$
   donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$\widehat{g_n}(0) = 0 \qquad \widehat{g_n}(\xi) = \frac{1-\cos(2\pi n\xi)}{i\pi\xi} \quad \text{si} \quad \xi \neq 0.$$

2. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Évaluons $\langle T_{g_n}, \varphi\rangle$
   $$\langle T_{g_n}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\mathbf{1}_{[-n,+n]}(x)\varphi(x)dx \qquad \text{et} \quad \langle T_{\operatorname{sgn}}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)dx.$$
   La suite de fonctions $(g_n\varphi)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions intégrables dans $\mathbb{R}$. De même, la fonction $\operatorname{sgn}\varphi$ est intégrable dans $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Posons $n_0 = E(|x|) + 1 = [|x|] + 1 \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_0$, on a $n > |x|$, et donc $x \in]-n, n[$.
   Par conséquent $g_n(x)\varphi(x) = \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)$, ce qui signifie que pour $p.p.x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait
   $$n \geq n_0 \qquad \Rightarrow \quad |g_n\varphi(x) - \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)| = 0 < \varepsilon.$$
   et que $p.p.x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)\varphi(x) = \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)$.
   Par ailleurs pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour p.p.$x \in \mathbb{R}$
   $$|g_n(x)\varphi(x)| \leq |\operatorname{sgn}(x)|\mathbf{1}_{[-n,n]}(x)|\varphi(x)| \leq 1.|\varphi(x)| = |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}).$$
   Les 3 conditions d'application du *théorème de la convergence dominée* sont réunies pour la suite $(g_n\varphi)_{n\geq 1}$, donc par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$
   $$\lim_{n\to+\infty}\langle T_{g_n}, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)dx = \langle T_{\operatorname{sgn}}, \varphi\rangle.$$
   On vient de prouver que la suite de distributions temperées $(T_{g_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la distribution T_{sgn} au sens de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose
   $$f_n(x) = \frac{1-\cos(2n\pi x)}{\pi x}. \tag{1}$$
   Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est continue dans $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues dans $\mathbb{R}^*$, la fonction du dénominateur ne s'annulant pas dans $\mathbb{R}^*$. Au voisinage de 0, par un développement limité de la fonction cos, on a
   $$1-\cos(2\pi nx) = \frac{(2\pi nx)^2}{2} - \frac{(2\pi nx)^4}{4!} + o(x^4) \qquad x \to 0,$$
   On déduit que que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{1-\cos(2n\pi x)}{\pi x} = 0$. La fonction f_n est donc prolongeable par 0 au voisinage de 0, et définit donc une fonction continue dans $\mathbb{R}$,
   La fonction f_n est bornée dans $[-1,+1]$ puisque elle continue dans $[-1,+1]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 1$ on a
   $$|f_n(x)| = \frac{1-\cos(2n\pi x)}{|\pi x|} \leq \frac{2}{\pi},$$
   La fonction $f_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ et donc f_n est une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à croissance lente. Par conséquent $T_{f_n} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. [2]

2. *Examen Final 2020* *Analyse de Fourier et Espaces de Sobolev* *Le chargé de la matière : Ahmed Z. Mokrane*

4. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons évaluer $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle \frac{1}{\pi} vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx - \int_{[-1,+1]} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\pi x}dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{\pi x}dx$.
En utilisant la partition $\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} = [-1,1] \cup \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$, on écrit

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx = \int_{[-1,1]} \frac{\big(1-\cos(2\pi n x)\big)\varphi(x)}{\pi x}dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\big(1-\cos(2\pi n x)\big)\varphi(x)}{\pi x}dx,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle \frac{1}{\pi} vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle &= \int_{[-1,+1]} \frac{\big(1-\cos(2\pi n x)\big)\varphi(x)}{\pi x}dx - \int_{[-1,+1]} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\pi x}dx \\
&\quad + \int_{|x|\geq 1} \frac{\big(1-\cos(2\pi n x)\big)\varphi(x)}{\pi x}dx - \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{\pi x}dx \\
&= -\int_{[-1,+1]} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)-\varphi(0)}{\pi x}dx - \int_{|x|\geq 1} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)}{\pi x}dx \\
&= -\int_{[-1,+1]} \frac{\cos(2\pi n x)(\varphi(x)-\varphi(0))}{\pi x}dx - \int_{[-1,1]} \frac{(1-\cos(2\pi n x)\varphi(0)}{\pi x} - \int_{|x|\geq 1} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)}{\pi x}dx \\
&= -\int_{[-1,+1]} \frac{\cos(2\pi n x)(\varphi(x)-\varphi(0))}{\pi x}dx - \varphi(0)\int_{[-1,1]} f_n(x)dx - \int_{|x|\geq 1} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)}{\pi x}dx.
\end{aligned}$$

[3] Remarquons que la fonction f_n est impaire dans $\mathbb{R}$ et comme $[-1,1]$ est un intervalle symétrique par rapport à 0, alors

$$\int_{[-1,1]} f_n(x)dx = \int_{[-1,1]} \frac{1-\cos(2\pi n x)}{\pi x}dx = 0,$$

ce qui implique que

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle \frac{1}{\pi} vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = -\int_{[-1,+1]} \frac{\cos(2\pi n x)(\varphi(x)-\varphi(0))}{\pi x}dx - \int_{|x|\geq 1} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)}{\pi x}dx. \tag{2}$$

Par utilisation de la formule de Taylor à l'ordre 1 au point 0 appliquée à la fonction φ en x, on a

$$\varphi(x)-\varphi(0) = x\int_0^1 \varphi'(tx)dt := x\psi(x),$$

et donc

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle \frac{1}{\pi} vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = -\frac{1}{\pi}\int_{[-1,+1]} \cos(2\pi n x)\psi(x)dx - \int_{|x|\geq 1} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)}{\pi x}dx. \tag{3}$$

Pour la première intégrale, on intègre par parties sur l'intervalle compact $[-1,1]$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos(2\pi n x)\psi(x)dx = \frac{1}{2\pi^2 n}\sin(2\pi n x)\psi(x)|_{x=-1}^{x=1} + \frac{1}{2\pi^2 n}\int_{-1}^{1} \sin(2\pi n x)\psi'(x)dx = \frac{1}{2\pi^2 n}\int_{-1}^{1} \sin(2\pi n x)\psi'(x)dx. \tag{4}$$

Pour la seconde intégrale, comme l'intégrale est convergente, on écrit

$$\begin{aligned}
-\int_{|x|\geq 1} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)}{\pi x}dx &= -\lim_{R\to+\infty}\int_{1\leq|x|\leq R} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)}{\pi x}dx \\
&= -\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{-R}^{-1} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)}{\pi x}dx + \int_{1}^{R} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)}{\pi x}dx\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

En intégrant de nouveau par parties sur les intervalles compacts $[-R,-1]$ et $[1,R]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{-1} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)}{\pi x}dx &= \frac{1}{2\pi^2 n}\sin(2\pi n x)\frac{\varphi(x)}{x}|_{x=-R}^{x=1} - \frac{1}{2\pi^2 n}\int_{-R}^{-1} \sin(2\pi n x)\frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)}{x^2}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 n}\sin(2\pi n R)\frac{\varphi(-R)}{R} - \frac{1}{2\pi^2 n}\int_{-R}^{-1} \sin(2\pi n x)\frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)}{x^2}dx \\
\int_{1}^{R} \frac{\cos(2\pi n x)\varphi(x)}{\pi x}dx &= \frac{1}{2\pi^2 n}\sin(2\pi n x)\frac{\varphi(x)}{x}|_{x=1}^{x=R} - \frac{1}{2\pi^2 n}\int_{1}^{R} \sin(2\pi n x)\frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)}{x^2}dx \\
&= \frac{1}{2\pi^2 n}\sin(2\pi n R)\frac{\varphi(R)}{R} - \frac{1}{2\pi^2 n}\int_{1}^{R} \sin(2\pi n x)\frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)}{x^2}dx
\end{aligned} \tag{6}$$

Par passage à la limite lorsque $R \to +\infty$, sachant que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ on a

$$\lim_{R\to+\infty} |\sin(2\pi n R)|\frac{|\varphi(\pm R)|}{R} \leq \lim_{R\to+\infty} \frac{|\varphi(\pm R)|}{R} = 0$$

3. *Examen Final 2020* *Analyse de Fourier et Espaces de Sobolev* *Le chargé de la matière : Ahmed Z. Mokrane*

En revenant à l'expression (5) et en passant à la limite lorsque $R \to +\infty$ compte tenu de (6), on obtient

$$\begin{aligned} -\int_{|x|\geq 1} \frac{\cos(2\pi nx)\varphi(x)}{\pi x} dx &= -\left(-\frac{1}{2\pi^2 n} \int_{-\infty}^{-1} \sin(2\pi nx) \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} dx - \frac{1}{2\pi^2 n} \int_{1}^{\infty} \sin(2\pi nx) \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2 n} \int_{|x|\geq 1} \sin(2\pi nx) \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} dx. \end{aligned} \tag{7}$$

En revenant à l'expression de (3), compte tenu des résultats de (4) et (7), on obtient enfin

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle - \langle \frac{1}{\pi} vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi^2 n} \int_{-1}^{1} \sin(2\pi nx)\psi'(x) dx + \frac{1}{2\pi^2 n} \int_{|x|\geq 1} \sin(2\pi nx) \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} dx. \tag{8}$$

En prenant le module de l'expression de (8) et en majorant $|\sin(2\pi nx)|$ par 1 et $\frac{1}{x^2}$ par 1, pour $|x| \geq 1$, on obtient

$$|\langle T_{f_n}, \varphi \rangle - \langle \frac{1}{\pi} vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle| \leq \frac{1}{2\pi^2 n} \left(\int_{-1}^{1} |\psi'(x)| dx + \int_{|x|\geq 1} |x\varphi'(x) - \varphi(x)| dx \right).$$

L'intégrale du membre de droite est finie du fait que $|\psi'|$ est une fonction continue dans l'intervalle $[-1, 1]$ et du fait que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, donc $x \mapsto x\varphi'(x) - \varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. En posant

$$C(\varphi) = \left(\int_{-1}^{1} |\psi'(x)| dx + \int_{|x|\geq 1} |x\varphi'(x) - \varphi(x)| dx \right) > 0,$$

On peut remarquer que $C(\varphi) \leq C p_2(\varphi)$, d'après l'injection de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$. On déduit que pour tout $n \geq 1$ on a

$$|\langle T_{f_n}, \varphi \rangle - \langle \frac{1}{\pi} vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle| \leq \frac{C(\varphi)}{2\pi^2 n}$$

Par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ on conclut que pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \langle \frac{1}{\pi} vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle,$$

c'est à dire que la suite de distributions tempérées $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers la distribution $\frac{1}{\pi} vp(\frac{1}{x})$ au sens de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

5. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ on sait que $\mathscr{F}(T_{g_n}) = T_{\widehat{g_n}} \quad (\mathscr{S}'(\mathbb{R}))$. Dans la question 1., nous avons aussi montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\widehat{g_n}(x) = \frac{1}{i} f_n(x).$$

et par conséquent $\mathscr{F}(T_{g_n}) = T_{\frac{1}{i} f_n} \quad (\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Par application du résultat de la question 4. on déduit que la suite de distributions tempérées $(\mathscr{F}(T_{g_n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers la distribution $\frac{1}{i\pi} vp(\frac{1}{x})$ au sens de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

$$\mathscr{F}(T_{g_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{i\pi} vp(\frac{1}{x}) \quad (\mathscr{S}'(\mathbb{R})). \tag{9}$$

Mais comme on a démontré que la suite de distributions tempérées $(T_{g_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la distribution T_{sgn} au sens de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$

$$T_{g_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} T_{\text{sgn}} \quad (\mathscr{S}'(\mathbb{R}));$$

par continuité séquentielle de l'opérateur de Fourier dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, on déduit que la suite de distributions tempérées $\big(\mathscr{F}(T_{g_n})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers la distribution $\mathscr{F}(T_{\text{sgn}})$ au sens de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$

$$\mathscr{F}(T_{g_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathscr{F}(T_{\text{sgn}}) \quad (\mathscr{S}'(\mathbb{R})). \tag{10}$$

Par conséquent, par unicité de la limite de la suite de distributions $\big(\mathscr{F}(T_{g_n})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans (9) et (10) dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, on conclut que

$$\mathscr{F}(T_{\text{sgn}}) = \frac{1}{i\pi} vp(\frac{1}{x}) \quad (\mathscr{S}'(\mathbb{R})).$$