Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Géométrie des courbes et surfaces
Mr. Zerguine Mohamed
2019-2020

DEVOIR À DOMICILE
2ÈME ANNÉE LMD

Exercice 1. Considérons la courbe plane γ suivante

$$\begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

(1) Réduire le domaine d'étude, en précisant les transformations. On note par γ_1 la partie de la courbe correspondant à $t \in [0, \pi]$.

(2) Prouver que la courbe γ_1 présente deux points singuliers, pour $t = 0$ et $t = t_0$ que l'on déterminera. On note M le point de paramètre t_0.

(3) Donner l'allure de la courbe au voisinage des points $O = (0,0)$ et M (équation des tangentes, position de la courbes et des tangentes). On note T la tangente au point M

(4) Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ les cercles de centre $C = (3,0)$ et de rayons respectifs $r_1 = 3$ et $r_2 = 1$.
(4.1) Vérifier que la droite T passe par C. Déterminer $\gamma \cap \mathscr{B}_1$.
(4.2) Soit N le point de γ de paramètre $\frac{\pi}{3}$. Montrer que γ est tangente à $\mathscr{B}_2$ au point N.

Exercice 2. Déterminer un domaine d'étude le plus réduit de la courbe $z(t) = \frac{1}{3}(2e^{it} + e^{-2it})$, où i représente le nombre imaginaire. En calculant $z(t + \frac{2\pi}{3})$, trouver une transformation géométrique laissant la courbe globalement invariante.

Exercice 3. Soient $I =]-2\pi, 2\pi[$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée

$$t \mapsto x(t) = 1 + \cos t + 2\cos\frac{t}{2}, \quad t \mapsto y(t) = \sin t.$$

(1) La courbe paramétrée γ est-elle régulière ?

(2) Montrer que γ admet l'origine $O = (0,0)$ comme point triple.

(3) Montrer au moyen d'un tableau de variation que la fonction $x'y'' - x''y'$ est strictement positive. En déduire que la courbure algébrique définie par

$$\kappa_a(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

de γ en $\gamma(t)$ garde un signe constant quel que soit $t \in I$.

(4) Donner l'allure de γ, en faisant apparaître les sysmétries éventuelles, les droites tangentes verticales et horizontales, et le point triple. (*On rappelle que :* $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$).

Exercice 4. On considère la courbe paramétrée définie par

$$x : t \mapsto x(t) = \frac{t}{t^2 - 1}, \quad y : t \mapsto y(t) = \frac{t^2}{t - 1}.$$

(1) Montrer que cette courbe possède un point double dont on précisera les coordonnées.

(2) On considère le plan muni du produit scalaire canonique. Montrer que les deux tangentes au point double sont orthogonales.

Exercice 5. Pour chacune des courbes paramétrées suivantes

$$\gamma_1 : t \mapsto (t^3 - t^4, t^6), \quad \gamma_2 : t \mapsto (t^2, t^2 + t^4), \quad \gamma_3 : t \mapsto (t^3, t^3 + t^5),$$

répondre aux questions suivantes

(1) La courbe est-elle régulière en $t = 0$?

(2) En faisant un développement limité, indiquer la forme de la courbe au voisinage de $t = 0$.

Exercice 6.

(1) Prouver que la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = t + e^t \\ y(t) = t + e^{-t} \end{cases}$$

présente un point double d'inflexion. Préciser l'équation de la tangente en ce point.

(2) Prouver que la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 + 2t^2 - t - 1 \\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

possède un point double. Préciser les tangentes en ce point.