Université de Batna 2
Département de Mathématiques
EDO L3 S5 2020/2021

Examen de Contrôle Final

Questions de Cours (04 points)

I- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, donner le théorème des accroissements finis. (02 points)

II- Enoncer un résultat de régularité de la solution d'une équation différentielle. (02 points)

Exercice 1 (08 points) Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} y' & = \dfrac{1}{y(t+1)} \\ y(t_0) & = y_0 > 0 \quad (t_0 > 0) \end{cases}$.

1- Résoudre pour $t > 0$ ce problème. (06 points)

2- Cette solution est-elle maximale ou globale ? (02 points)

Exercice 2 (08 points) Soit le problème de Cauchy $(P)\begin{cases} y' & = \sqrt{y^2 + t^2} \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$.

Prouver l'existence d'une seule solution maximale au problème (P). (Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz).

Corrigé type

Questions de Cours

I- **Théorème des accroissement finis** Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$.(02 points)

II- **Régularité de la solution** Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^k(I \times \Omega)$, alors toute solution de (E) est de classe C^{k+1} sur J.(02 points)

Exercice 1

1.1- $I = \mathbb{R}_+^*$, $\Omega = \mathbb{R}^*$ car $y_0 > 0$ et donc la fonction nulle ne peut pas vérifiée ce problème. (1 *point*)

1.2- On a

$$\begin{aligned} y' = \frac{1}{y(t+1)} &\Rightarrow ydy = \frac{dt}{t+1} \\ &\Rightarrow \int ydy = \int \frac{dt}{t+1} = \int \frac{d(t+1)}{t+1} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \ln(t+1) + c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow y^2(t) = 2\ln(t+1) + c', c' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Puisque $t > 0 \Rightarrow t + 1 > 1$, donc $\ln(t + 1) > 0$, alors il faut prendre c' tel que
$2\ln(t+1)+c' \geq 0, \forall t > 0$. Spécialement $y^2(t_0) = 2\ln(t_0+1)+c' \Rightarrow c' = y^2(t_0)-2\ln(t_0+1) \geq 0$.

Finalement

$$y^2(t) = 2\ln(t+1) - 2\ln(t_0+1) + y_0^2 = 2\ln\left(\frac{t+1}{t_0^2+1}\right) + y_0^2 \geq 0$$

$$\text{et donc } y(t) = \pm\sqrt{2\ln\left(\frac{t+1}{t_0^2+1}\right) + y_0^2}$$

Puisque $y_0 > 0$, alors la solution $y(t) = -\sqrt{2\ln\left(\frac{t+1}{t_0^2+1}\right) + y_0^2}$ sera rejetée. Ainsi la solution est $y(t) = \sqrt{2\ln\left(\frac{t+1}{t_0^2+1}\right) + y_0^2}$, $\quad \forall t > 0$ avec y_0 et t_0 tels que $y_0^2 - 2\ln(t_0+1) \geq 0$. (5 points)

Remarque On peut aussi mettre $y^2(t) = |2\ln(t+1) + c'|$ et éviter toute la discussion.

2- Puisque $I = J =]0, +\infty[$, la solution est globale. (2 points)

Exercice 2

On a $f(t,y) = \sqrt{y^2+t^2}$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, car c'est la composition de la fonction polynomiale et de la fonction racine carrée (2 points) et puisque

Méthode 1 (4 points)

soit $r_0 > 0$ et $T > 0$ et $C = [t_0 - T, t_0 + T \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]]$

$$\forall (t,y_1),(t,y_2) \in C \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1 - y_2| \times \frac{|y_1+y_2|}{\sqrt{y_1^2+t^2}+\sqrt{y_2^2+t^2}},$$

la fonction $\dfrac{|y_1+y_2|}{\sqrt{y_1^2+t^2}+\sqrt{y_2^2+t^2}}$ est continue sur le compact C, donc son sup existe et prenons $k \geq \sup_{(t,y_1),(t,y_2)\in C} \dfrac{|y_1+y_2|}{\sqrt{y_1^2+t^2}+\sqrt{y_2^2+t^2}}$ pour avoir
$\forall (t,y_1),(t,y_2) \in C \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k.|y_1 - y_2|$

Méthode 2 (4 points)

$\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \dfrac{t}{\sqrt{y^2+t^2}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \dfrac{y}{\sqrt{y^2+t^2}}$ sont continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R} - (0,0)$ on a $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R} - (0,0))$, et dans ce cas il faut supposer $t_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$.

donc la fonction f est localement Lipschitzienne on conclut d'après le théorème de Cauchy Lipschitz l'existence d'une seule solution maximale y à notre problème définie sur un intervalle ouvert J comprenant t_0 . (2 points)