Examen final (13 Juin 2019)

Université de Batna 2, Département de Mathématiques
3ème année Licence Mathématiques
Module: Introduction à la théorie des opérateurs
(2 heures)

Partie I:

Les questions suivantes sont indépendantes:

1. Soient X, Y deux $\mathbb{k}$−e. v. n., $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$.

   (a) Complète:
   - (1pt) $\mathbb{k}$ représente........................
   - (1pt) (A_n) converge ponctuellement vers A veut dire ....

   (b) (1pt) Quelle est la relation entre la convergence ponctuelle et la convergence uniforme.

2. (1,5pt) Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés (A_n) défini sur $C[0,1]$ par $A_n f = \left(\frac{n}{n^2+1} + 1\right) f$. Montrer que (A_n) converge ponctuellement vers l'opérateur identité.

3. (1,5pt) Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés (A_n) défini sur $l_2(\mathbb{R})$ par $A_n(x_1, x_2, ...) = \frac{1}{n^2}(x_1, x_2, ...)$. Montrer que (A_n) converge uniformément vers l'opérateur nul.

4. (1,5pt) Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ deux opérateurs autoadjoints. Montrer que l'opérateur $A + B$ est autoadjoint.

5. (1,5pt) Soit X un espace normé réel et $A : X \to X$ une isométrie linéaire. Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $|\lambda| = 1$.

   Bonus (1pt): Pourquoi on a supposé que A est définie de X **dans lui même.**

6. (0,5pt+0.5pt+1pt) Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace de tout les polynômes à coefficients réels muni de la norme $\left\| \sum_{i=0}^{i=k} a_i x^i \right\| = \max_{i=\overline{0,k}} |a_i|$ (ici $a_i \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$). Considérons l'opérateur linéaire $A : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $AP = P'$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|x^n\|$ et $\|Ax^n\|$. Déduire que A n'est pas borné.

7. (0,5pt +0,5pt) Présentation de la copie et signalisation du numéro de groupe.

Partie II:

Considérons l'opérateur A définit par

$$Af = \int_0^1 f(t)\,dt \text{ pour tout } f \in C[0,1].$$

$C[0,1]$ muni de la norme de la convergence uniforme.

1. (0,5 pt +0,5pt) Déterminer l'espace d'arrivé de A ainsi que la norme sur cet espace.
2. (0,75pt+0,75pt+1,5pt) Montrer que A est linéaire, borné et $\|A\| = 1$.
3. (1,5pt) Est ce que A est injectif (*Ind.: Calculer* Ag *avec* $g(t) = \cos \pi t$ *pour tout* $t \in [0,1]$).

Partie III:

Soient H un espace de Hilbert, A et B deux opérateurs linéaires bornés sur H.

1. (0,5pt+0,5pt+0,5pts) Montrer que l'opérateur $A + B$ est linéaire borné. Puis, déduire que $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
2. (1pt) Montrer que $(A + B)^* = A^* + B^*$.

Université de Batna 2

Département de Maths

3ème licence Mathématiques

Introduction à la théorie des opérateurs.

Partie I.

① ⓐ * $\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ∨ $\mathbb{C}$ (1pt)

* Par définition, (A_n) converge ponctuellement vers A si $A_n x \xrightarrow[n \to +\infty]{} A x$ pour tout $x \in X$ (1pt)

ou bien $\| A_n x - A x \| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

ⓑ (A_n) C.U $\Longrightarrow$ (A_n) C.P (0,5)

Si (A_n) C.P on ne peut rien dire sur la C.U de (A_n) (0,5)

② Pour tout $f \in C([0,1])$, on a

$$\| A_n f - I f \| = \left\| \left(\frac{n}{n^2+1} + 1 \right) f - f \right\| = \left\| \frac{n}{n^2+1} f \right\| = \frac{n}{n^2+1} \| f \| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(0,25) (0,25) 5 (0,5) 5

4/6

On a :

$$\|A_n - 0\| \overset{0,25}{=} \|A_n\| = \sup_{0 \neq x \in \ell_2(\mathbb{R})} \frac{\|A_n(x_1, x_2, \ldots)\|}{\|(x_1, x_2, \ldots)\|}$$

$$\overset{0,25}{=} \sup_{0 \neq x \in \ell_2(\mathbb{R})} \frac{\|\frac{1}{n^2}(x_1, x_2, \ldots)\|}{\|(x_1, x_2, \ldots)\|}$$

$$= \sup_{0 \neq x \in \ell_2(\mathbb{R})} \frac{\frac{1}{n^2}\|(x_1, x_2, \ldots)\|}{\|\ldots\|}$$

$$\overset{0,5}{=} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{0,5} 0$$

④ On a :

$$(A+B)^* \overset{0,75}{=} A^* + B^* \overset{0,75}{=} A + B$$

⑤ On a : λ est une v. p de A alors $\exists\, 0 \neq x \in X$; $Ax = \lambda x$ (0,25)

De plus A est une isométrie donc

$$\|Ax\| \overset{0,25}{=} \|x\|$$

Ainsi : $\|\lambda x\| \overset{0,5}{=} \|x\|$ Donc $|\lambda| \, \|x\| \overset{0,5}{=} \|x\|$

Comme $x \neq 0$ ($\|x\| \neq 0$) Donc $|\lambda| = 1$.

⑥ $\|x^n\| = \|0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 1 x^n\| \overset{\max \text{coef}}{=} 1$ (0,5)

$\|Ax^n\| = \|(Ax^n)'\| = \|n x^{n-1}\| = n$ (0,5)

$$\boxed{\text{Bonus } Ax = \lambda x \in X \quad 1 \text{ pt}}$$

Montrons que A est non borné, par l'absurde.

Supposons que A est borné (0,25) alors

$\exists M > 0, \forall P \in \mathbb{R}[x]$ tq $\|AP\| \leq M\|P\|$ (0,25)

Pour $P_n = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ on trouve.

$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|Ax^n\| \leq M\|x^n\|$ (0,5)

Ainsi $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \leq M$ (0,5)

Ceci implique que $\mathbb{N}^*$ est majoré

Contradiction (0,25)

Partie 2 :

① L'espace d'arrivé est $\mathbb{R}$. (0,5)

Sa norme est la valeur absolue $|\cdot|$ (0,5)

② A est linéaire? Soient $f, g \in C[0,1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$A(\alpha f + g) \overset{(0,25)}{=} \int_0^1 (\alpha f + g)(t)\,dt$

(0,25) $= \alpha \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 g(t)\,dt$

(0,25) $= \alpha Af + Ag$.

A est borné : Soit $f \in C[0,1]$. On a :

$$|Af| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

0,25 $$\leq \int_0^1 \|f\|_\infty\,dt \leq \|f\|_\infty$$ 0,25

Ainsi

$\exists M = 1 > 0,\ \forall f \in C[0,1],\ |Af| \leq M \|f\|_\infty$ (*) 0,25

$\|A\| = 1$? 0,25

De (*), on trouve que $\boxed{\|A\| \leq 1}$ — (1) 0,25

On pose $f_0 = 1 \neq 0$. On a : 0,25

$$\frac{|Af_0|}{\|f_0\|_\infty} = \frac{\left|\int_0^1 f_0(t)\,dt\right|}{\sup_{t\in[0,1]} |f_0(t)|} = \frac{\int_0^1 1\,dt}{\sup_{t\in[0,1]} 1} = 1$$ 0,25

Alors $$\|A\| = \sup_{0 \neq f \in C[0,1]} \frac{|Af|}{\|f\|} \geq \frac{|Af_0|}{\|f_0\|} = 1$$ 0,25

C-à-d $\boxed{\|A\| \geq 1}$ (2) 0,25

De (1) et (2), on trouve que $\boxed{\|A\| = 1}$

③ Non, A n'est pas injectif ; en effet 0,5

$$Ag = \int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 \cos \pi t\,dt = +\frac{1}{\pi} \sin \pi t \Big|_0^1$$

0,5 $$+\frac{1}{\pi}(0) - \left(+\frac{1}{\pi}\, 0\right) = \boxed{0}$$

4

6

On a $Ay = 0$ Alors $y \in N(A)$ donc

$N(A) \neq \{0\}$ (0,5)

Donc A est non injectif.

Partie 3

① Pour tout α, $x, y \in H$. On a :

$$(A+B)(\alpha x+y) = A(\alpha x+y) + B(\alpha x+y)$$
$$= A(\alpha x) + Ay + B(\alpha x) + By$$
$$= \alpha Ax + Ay + \alpha Bx + By$$
$$= \alpha(Ax + Bx) + Ay + By$$
$$= \alpha(A+B)x + (A+B)y$$

(0,5)

Donc $(A+B)$ linéaire.

entre 0 → 0,8

Soit $x \in H$ on a

(0,5)

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$$
$$\leq \|A\|.\|x\| + \|B\|\,\|x\| =$$

Donc

$$\exists M>0, \|(A+B)x\| \leq \underbrace{(\|A\| + \|B\|)}_{M} \|x\|, \forall x \in H. \quad (*)$$

Ceci implique que $(A+B)$ est borné.

De $(*)$, on trouve que $\boxed{\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|}$

(0,5)

2) On a

pour tout $x, y \in H$, on a :

$$\langle (A+B)x, y\rangle \overset{0,25}{=} \langle Ax + Bx, y\rangle$$
$$\overset{0,25}{=} \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle$$
$$\overset{0,25}{=} \langle x, A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle$$
$$\overset{0,25}{=} \langle x, (A^* + B^*)y\rangle$$

Ainsi : $(A+B)^* = A^* + B^*$.

6/6