Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie
Mme. Hanachi Adalet
26-01-2020

EXAMEN FINAL

2ÈME ANNÉE LICENCE MATHS (2h)

Questions de cours. Indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1- Soit E un ensemble non vide.
  a- On peut toujours définir une topologie sur E.
  b- Si plusieurs topologies peuvent exister sur E, elles sont comparables.

2- Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E.
  a- Si A est finie, alors A est fermée.
  b- Si A n'est pas ouverte, alors A est fermée.

3- L'ensemble suivant :
  a- $A=\{x\in\mathbb{R};\ \ \alpha\le x\le\beta\}$ est compact dans $\mathbb{R}$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
  b- $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \ -1\le x\le 1\quad et\quad 0\le y\le 2\}$ est compact dans $\mathbb{R}^2$.

4- Soit $E=C^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $f\in E$, l'application

$$N(f)=|f(0)|+\int_0^1|f'(x)|dx$$

est une norme sur E.

Exercice 1 Pour tout réel a : on pose $I_a=]-\infty,a]$ et on note $\mathscr{B}=\{I_a,a\in\mathbb{R}\}\cup\{\emptyset\}$. Soit τ la topologie engendrée par la base $\mathscr{B}$.

1- Préciser les ouverts et les fermés de $(\mathbb{R},\tau)$.

2- Donner l'intérieur et l'adhérence des ensembles suivants : $A=\{-5,1\}$, $B=]-5,1[$ et $C=\mathbb{N}$.

3- L'espace $(\mathbb{R},\tau)$ est-il séparé ?

Exercice 2 On définit sur l'espace de Banach $(E,\|.\|_\infty)$ avec $E=C([0,1],\mathbb{R})$, l'application suivante : $\phi: E\to E$ par :

$$\phi(f)(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{4+t^2}dt$$

1- Montrer que $\forall x\in[0,1]$: $\arctan x\le x$.

2- Sachant que $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$, montrer que l'équation $\phi(f)-f=0$ admet une solution unique dans E.

Interrogation écrite

1. Soient (E,d) un espace métrique, f,g deux applications continues sur E et $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que
   - $A=\{x\in E;\ \ f(x)<\lambda\}$ est un ouvert de E.
   - $B=\{x\in E;\ \ f(x)\ge\lambda\}$ est un fermé de E.
   - $C=\{x\in E;\ \ f(x)=g(x)\}$ est un fermé de E.

2. Soit d la distance discrète sur E définie pour tout $x,y\in E$ par :

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & si\ x\neq y\\ 0, & si\ x=y\end{cases}$$

   1. Déterminer la boule ouverte $B(x,r)$ où $x\in E$ et $r>0$.
   2. En déduire que toute partie dans (E,d) est à la fois ouverte et fermée.