Megri

Université de Batna 2. **Topologie** Le 13/01/2019 Durée : 1h30

Examen Final

Questions de cours. (5,5)

Q1. Soit E un ensemble non vide. Donner la définition d'un espace topologique séparé. 1 0,5 — (1,5)

Q2. Répondre par vrai ou faux, en donnant un contre exemple dans le cas du faux.

Soit (X, d) un espace métrique.

2.1 Toute suite de Cauchy est convergente. (F 0,5) (Exemple 0,5) — (1)

2.2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\Leftrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. (F 0,5), Exemple 0,5) — (1)

2.3 Toute suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est concergente. (V 0,5) — (0,5)

Q3. $\mathbb{R}$ est un espace compact. (F 0,5) (Exemple 0,5) — (1)

Q4. Soient K_1 et K_2 deux parties compactes d'un espace métrique (X, d), alors leur réunion $K_1 \cup K_2$, leur intersection $K_1 \cap K_2$ et leur produit cartésien $K_1 \times K_2$ sont compactes aussi. (V 0,5) — (0,5)

(5,5)

Exercice 1 *Soit (X, d) un espace métrique et A, B deux parties de X.*

1. *Montrer que : $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.* — (2 pts)
2. *Considérons $X = \mathbb{R}^2$ muni de la distance $d((x,y);(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$.*

   Soient $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1, y > 0\} - \{(0,0)\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1, y < 0\}$

   2.a Représenter graphiquement A et B. (repré A 0,5), (repré B 0,5) — (1).

   2.b Déterminer les ensembles $A^\circ, B^\circ, \overline{A}$ et $\overline{B}$. (A° 0,5) (B° 0,5) ($\bar{A}$ 0,5) ($\bar{B}$ 0,5) — (2)

   2.c Que conculez-vous ? — (0,5)

(4 pts)

Exercice 2 *Soient X et Y deux espaces métriques et $f : (X, d) \to (Y, d')$ une application.*

1. *Montrer que si f est uniformément continue, alors elle conserve les suites de Cauchy.* (2 pts)
2. *Supposons que f est uniformément continue, bijective et de réciproque continue. Monterer que si Y est complet alors X l'est aussi.* (2 pts)

(5 pts)

Exercice 3 *Soit la fonction $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.*

1. *Énoncer le théorème du point fixe.* (1)
2. *Montrer que f admet un point fixe unique sur $[1, 2]$, et trouver ce point.*

E complet — (1)

$f(E) \subset E$ — (1)

f contractante (2) → (1 déf) + (1 appli)

$\bar{u} = f(\bar{u})$ — (1)

Bon Courage.

Corrigé type d'examen final de topologie.

<u>Questions de cours</u> Voir le cours

<u>Exo1</u> : 1 Soit (X, d) un espace métrique et A, B deux parties de X.

1) - Si $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

On a : $\overset{\circ}{A} \subset A \subset B$, donc $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert inclu ds B, comme $\overset{\circ}{B}$ est le plus grand ouvert inclus ds B, on trouve $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

- $\overline{A} \subset \overline{B}$. On a $A \subset B \subset \overline{B}$, donc $\overline{B}$ est un fermé contenant A, comme $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, on trouve

$$\overline{A} \subset \overline{B}.$$

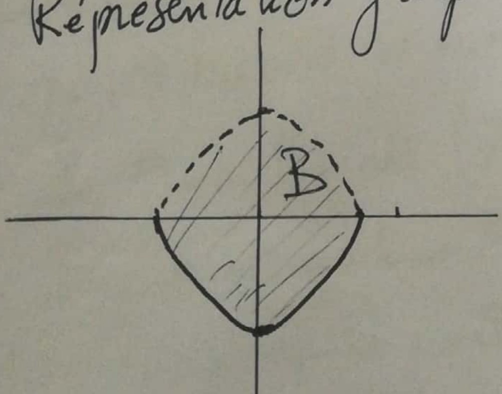
- Considérons $(X = \mathbb{R}^2, d_2)$ tq :

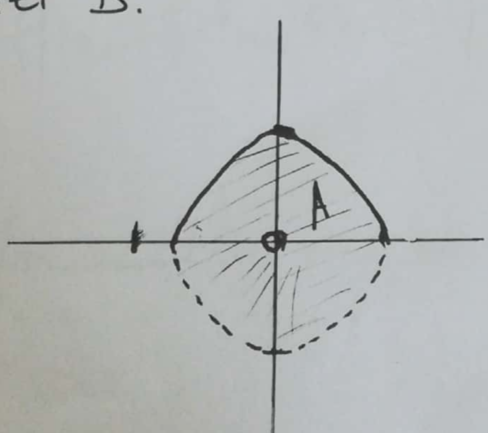
$$d_2 = d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$((x,y),(x',y')) \longmapsto d((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1, y > 0\} - \{(0,0)\}.$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1, y < 0\}.$$

-a Représentation graphique de A et B.





-b $\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1\} \setminus \{(0,0)\}$.

$\mathring{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1\}$.

$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R} / x^2+y^2 \leq 1\} = \bar{B}$

1-C On conclue que la réciproque de (1) est fausse.

on a $A \not\subset B$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. et $\bar{A} = \bar{B}$.

Exercice 2 On a : $f:(X,d) \longrightarrow (Y,d')$ une application.

1) - Supposons que f est uniformément continue c.à.d.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x,y \in X$ tq $d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy ds X, montrons que $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy ds Y.

On a : (x_n) est de Cauchy ds X, alors

$\forall \varepsilon_0 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n,m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon_0$.

donc pour $\varepsilon_0 = \delta$ on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ si $n,m \geq n_0$ $d(x_n,x_m) < \varepsilon_0 = \delta \Rightarrow d'(f(x_n),f(x_m)) < \varepsilon$

autrement dit :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ si $n,m \geq n_0 \Rightarrow d'(f(x_n),f(x_m)) < \varepsilon \Leftrightarrow (f(x_n))_n$ est de Cauchy ds (Y,d').

) - Supposons maintenant f est uniformément continue, bijective et de réciproque continue.

Montrons que si Y est complet, alors X est complet. c.à.d toute suite de Cauchy est convergente.

Soit (u_n) une suite de Cauchy ds X, d'après (1), on trouve que $(f(u_n))_n$ est de Cauchy ds Y, comme Y est complet alors $(f(u_n))_n$ converge vers $l \in Y$, en utilisant la continuité séquentielle, on trouve :

Si $f(u_n) \xrightarrow[n]{} l \Rightarrow f^{-1}(f(u_n)) \longrightarrow f^{-1}(l)$.

mais $f^{-1}(f(u_n)) = u_n$, donc il existe $u = f^{-1}(l) \in X$ tq $u_n \longrightarrow u$, donc X est complet.

Exo3 : Soit $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ Tq $f(u) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{2}{u}\right)$.

. Théorème de pt fixe : Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$.

Si f est contractante, alors il existe $\bar{u} \in X$ unique tq $\bar{u} = f(\bar{u})$.

2). Pour que f adm et un pt fixe unique sur $[1,2]$, il faut que $X = [1,2]$ et f verifiant les conditions du théo de pt fixe Cad $f : X \longrightarrow X$. et X est Complet, f est contracta

- on a X est complet car il est fermé ds complet

- $f(X) \subset X$? on a $1 \leq u \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{u}{2} \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{2}{u} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f(u) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{2}{u}\right)$

$\Rightarrow 1 \leq f(u) \leq 2$

Ce qui donne $f([1,2]) \subset [1,2]$.

- Il reste à verifier que f est contractante.

f est contractante $\Longleftrightarrow \exists k \in]0,1[$ tq : $\begin{cases} |f'(x)| < k \\ \forall x \in [1,2]. \end{cases}$

on a : $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$

pour $1 \leq x \leq 2$ on trouve $-\frac{1}{2} \leq f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \leq \frac{1}{4}$

donc $\begin{cases} |f'(x)| \leq \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1 \\ \forall x \in [1,2]. \end{cases}$

Donc f admet un pt fixe unique ds $[1,2]$.

$$\bar{x} = f(\bar{x}) = \frac{1}{2}\left(\bar{x} + \frac{2}{\bar{x}}\right) = \bar{x} \quad \text{—— } (*)$$

$$(*) \Longleftrightarrow \frac{\bar{x}}{2} + \frac{1}{\bar{x}} = \bar{x} \Longleftrightarrow -\frac{\bar{x}}{2} + \frac{1}{\bar{x}} = \frac{-\bar{x}^2 + 2}{2\bar{x}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \bar{x} = \pm\sqrt{2}$$

le pt fixe unique ds $[1,2]$ est $\bar{x} = \sqrt{2}$.