Exercices corrigés Master2 AFTO

Théorie de Fredholm

I

Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie.

(1) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $T \in \Phi_+(H)$;

(ii) $\exists S \in B(H), \exists K \in \mathcal{K}(H), \quad ST = I + K$.

Preuve: (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons (i) vraie.

On a alors $\dim \ker T < \infty$ et $R(T)$ fermé.

On pose $E_1 = (\ker T)^{\perp}$, $F_1 = R(T)^{\perp}$.

Alors $H = \ker T \oplus E_1$ (S.D.$\perp$, donc S.D.T).

et comme $R(T)$ est fermé, alors $H = R(T) \oplus F_1$

(S.D.$\perp$, donc topologique).

Donc l'opérateur $\tilde{T} : E_1 \longrightarrow R(T)$

~~(R(T) et~~ (E_1 et $R(T)$ sont deux Banach)

est linéaire borné inversible.

~~On de~~ Soit P la projection orthogonale

de H sur $\ker T$. P est donc linéaire

borné de rang fini, donc compact.

Soit Il suffit de prendre :

$S = \tilde{T}^{-1} \oplus 0 : H = R(T) \oplus F_1 \longrightarrow H = E_1 \oplus \ker T$

$K = -P$.

On a donc, pour $x \in H$, $x = x_1 + x_0$, $x_1 \in E_1$, $x_0 \in \ker T$,

$$STx = STx_1 = \tilde{T}^{-1} T x_1$$

$$= x_1 = (I - P)x$$

Donc $ST = I - P = I + K$, avec K compact

et $S \in B(H)$. Ce qui montre (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons (ii) vraie.

Il existe alors $S \in B(H)$, $K \in \mathcal{K}(H)$: $ST = I + K$.

Donc Comme $I + K \in \Phi(H)$, donc $ST \in \Phi(H)$.

Alors $S \in \Phi_-(H)$ et $T \in \Phi_+(H)$. D'où (i)

Scanned by CamScanner

Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne de H.
On définit l'opérateur $S : H \longrightarrow H$ par

$$\forall x \in H, \quad Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1}$$

(1) Montrer S est linéaire isométrique.
(2) Trouver $\ker S$ et $R(S)$.
(3) Déduire que S est un Fredholm et trouver $\operatorname{ind} S$.

<u>Preuve:</u> (1) (a) S est bien défini. En effet, pour $x \in H$.

$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 < \infty$ (car $(e_n)_{n\geq 1}$ est un sy. $\perp$.N)

Alors $Sx \in H$, avec $\|Sx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

(b) S est linéaire. En effet, pour $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$S(\lambda x + y) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \lambda x + y, e_n \rangle e_{n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \langle x, e_n \rangle + \langle y, e_n \rangle\right) e_{n+1}$$
$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_{n+1}$$
$$= \lambda Sx + Sy$$

(c) S isométrique. En effet, pour $x \in H$, on a

$$\|Sx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$$ (Egalité de Parseval car (e_n) base hilb.)

(2) (a) $\ker S = ?$ Pour $x \in H$, on a :

$$[x \in \ker S] \iff [Sx = 0]$$
$$\iff \left[\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1} = 0\right]$$
$$\iff [\forall n \geq 1, \langle x, e_n \rangle = 0]$$
$$\iff [x = 0]$$

Alors $\ker S = \{0\}$.

(b) $R(S) = ?$ De la définition de S, on a

$$R(S) = \overline{sp\{e_n : n \geq 2\}}.$$

(3) De (2)-(a), on tire $\alpha(S) = \dim \ker S = 0$.

De (2)-(b), on tire $H = sp\{e_1\} \oplus R(S)$,

donc $R(S)$ de codimension 1, $\beta(S) = 1$.

Donc S est de Fredholm et $\operatorname{ind} S = \beta(S) - \alpha(S) = 1$