TD N°3 Algèbre 03

EXO4 soit λ une valeur propre et X un vecteur propre associé à λ, on a $f(X) = \lambda . X$

On a $0 = (f-2id)\circ(f-3id)(X) = (f-2id)(f(X)-3X)$

$$= (f-2id)(\lambda X - 3X)$$
$$= f(\lambda X - 3X) - 2(\lambda X - 3X)$$
$$= \lambda(\lambda X - 3X) - 2(\lambda X - 3X)$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda X - 3X)$$
$$= (\lambda-2)(\lambda-3)X$$

$X \neq 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

spect$(f) = \{2, 3\}$

2) On a : $E_2 = \ker(f - 2id)$

$E_3 = \ker(f-3id)$

et $\forall x \in E$; $x = \underbrace{(f(x) - 2x)}_{\in E_3} - \underbrace{(f(x) - 3x)}_{\in E_2}$

Donc $E = E_3 \oplus E_2$ dim E = dim E_2 + dim E_3

ce qui implique que

f est diagonalisable

Donc f est diagonalisable

EXO5

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tq $f\circ f = f$. soit λ une valeur propre et x un vecteur propre associé à λ, on a donc

$f(x) = \lambda x$

$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$

$\lambda x = f(x) = (f\circ f)(x)$ donc $\lambda(\lambda-1)X = 0$ $X \neq 0$ alors

Donc $\lambda X = \lambda^2 X$ donc spec$(f) = \{0, 1\}$

$\lambda(\lambda-1) = 0$

2) $u = f(x)$ non nul ; $f(u) = f(f(x)) = f(x) = u$

ie $f(u) = u$ donc u vecteur propre associé à $\lambda = 1$

$f \neq id$ donc $\exists x \in \mathbb{R}^n$ / $v = x - f(x)$ non nul

$f(v) = f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$

$f(v) = 0 = 0v$ donc v vecteur propre associé à $\lambda = 0$