جامـــعة باتـــنة 2 كلية الرياضيات والإعلام الآلـــي قسم الرياضيات

2018 – 2019 إختبار قصير المدى 1 مادة التوزيعات السنة الأولى ماستر

24.01.2019 *Énoncé et Corrigé.*

Le Chargé de Cours de la Matière
Mokrane A.Z.

[1]

Exercice 1. Considérons les fonctions $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^{-\frac{3}{2}} & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} (x-1)^{-\frac{1}{2}} & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

1. Prouver que $g \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et que $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
2. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$< u, \varphi >= \lim_{n \to +\infty} \Big(\int_{1+\frac{1}{n}}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx - 2\sqrt{n}\varphi(1) \Big).$$

(1) Montrer que cette expression existe et définit une distribution sur $\mathbb{R}$, notée u.

(2) Soit $I\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $I(x) = x - 1$.
Calculer au sens des distributions $I.u$.

(3) Soit $v := T_h$ la distribution associée à la fonction h. Calculer au sens des distributions $\dfrac{d}{dx}v$.
Montrer que la distribution v est solution (au sens des distributions) de l'équation différentielle

$$2I\frac{d}{dx}v + v = 0 \quad (\mathscr{D}'(\mathbb{R})).$$

Démonstration. 1. La fonction g est définie presque partout dans $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $[1, +\infty[$ et dans $]-\infty, 1[$. Elle est donc intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$, ne contenant pas le point $x = 1$. Cependant elle n'est pas intégrable au voisinage de $x = 1$. En effet, soit K un compact de $\mathbb{R}$ tel que $1 \in K$. Comme K est borné on peut supposer que K est un intervalle $[1, c]$ où $c > 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[1+\varepsilon, c] \subset]1, +\infty[$, donc la fonction positive g est intégrable dans $[1+\varepsilon, c]$ et on a

$$\int_{1+\varepsilon}^{c} g(x)dx = \int_{1+\varepsilon}^{c} (x-1)^{-\frac{3}{2}}dx = -2(x-1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=1+\varepsilon}^{x=c} = -2(c-1)^{-\frac{1}{2}} + 2\varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

Cependant $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{c} g(x)dx = +\infty$. L'intégrale $\int_K g(x)dx$ n'existe pas et donc $g \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

La fonction h est définie presque partout dans $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $[1, +\infty[$ et dans $]-\infty, 1[$. Elle est donc intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$, ne contenant pas le point $x = 1$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$ tel que $1 \in K$. Comme K est borné on peut supposer que K est un intervalle $[1, c]$ où $c > 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[1+\varepsilon, c] \subset]1, +\infty[$ donc la fonction positive h est intégrable dans $[1+\varepsilon, c]$ et on a

$$\int_{1+\varepsilon}^{c} h(x)dx = \int_{1+\varepsilon}^{c} (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx = +2(x-1)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=1+\varepsilon}^{x=c} = 2(c-1)^{\frac{1}{2}} - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\frac{1}{2}} = 0$, alors $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{c} h(x)dx = 2(c-1)^{\frac{1}{2}} < +\infty$, donc par application du Théorème de Lebesgue on a $\int_K h(x)dx = \int_{[1,c]} h(x)dx = \int_1^c h(x)dx = 2(c-1)^{\frac{1}{2}}$ et donc que $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

2. (1) Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'expression

$$u_n(\varphi) = \Big(\int_{1+\frac{1}{n}}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx - 2\sqrt{n}\varphi(1) \Big).$$

1. <u>*Barème de Notation sur 12 points*</u> :
1. :*4 points*-2.(1) : *4 points*, 2.(2) : *3 points*, 2.(3) : *4 points*, 2.(4) : *2 point*.

Comme le support de φ est compact dans $\mathbb{R}$, il existe $R(\varphi) := R > 1$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq R$, nous avons $\varphi(x) = 0$. la fonction g est intégrable dans tout compact de $\mathbb{R}$ ne contenant pas le point $x = 1$. En particulier elle est intégrable dans l'intervalle $[1 + \frac{1}{n}, R]$ et donc on a

$$u_n(\varphi) = \Big(\int_{1+\frac{1}{n}}^{R} g(x)\varphi(x)dx - 2\sqrt{n}\varphi(1)\Big).$$

En écrivant la formule de Taylor pour φ jusqu'à l'ordre 1 au point $x = 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \varphi(1) + (x-1)\int_0^1 \varphi'(1 + t(x-1))dt = \varphi(1) + (x-1)\psi(x). \tag{1}$$

Soit $x \in [1 + \frac{1}{n}, R]$. Dans ce cas on a $g(x) = (x-1)^{-\frac{3}{2}}$ et par intégration sur $[1 + \frac{1}{n}, R]$:

$$\begin{aligned}\int_{1+\frac{1}{n}}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx &= \int_{1+\frac{1}{n}}^{R} (x-1)^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)dx = \varphi(1)\int_{1+\frac{1}{n}}^{R} (x-1)^{-\frac{3}{2}}dx + \int_{1+\frac{1}{n}}^{R} (x-1)^{-\frac{1}{2}}\psi(x)dx \\ &= -2(R-1)^{-\frac{1}{2}} + 2(\frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}}\varphi(1) + \int_{1+\frac{1}{n}}^{R} (x-1)^{-\frac{1}{2}}\psi(x)dx.\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\Big\{ \int_{1+\frac{1}{n}}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx - 2\sqrt{n}\varphi(1)\Big\} = -2(R-1)^{-\frac{1}{2}}\varphi(1) + \int_{\mathbb{R}}^{R} f_n(x)(x)dx.. \tag{1}$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a posé

$$f_n(x) = h(x)\mathbf{1}_{\{1+\frac{1}{n} \leq x \leq R\}}(x)\psi(x).$$

Comme $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ est une une suite de fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$ convergeant simplement dans $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = h(x)\mathbf{1}_{[1,R]}(x)\psi(x),$$

lorsque $n \to +\infty$ puisque pour tout $x \neq 1$, si $x > R$, ou si $x < 1$, on a $f_n(x) = f(x) = 0$ et si $1 < x < R$, il existe $n_0 > 0$ tel que $1 + \frac{1}{n_0} < x < R$, et donc pour tout $n \geq n_0$ on a $f_n(x) = f(x) = 1$.

En outre, la fonction $|\psi|$ est bornée dans $\mathbb{R}$ avec $|\psi(x)| = \displaystyle\int_0^1 |\varphi'(tx)|dt \leq \sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi'(y)|$, la fonction h est intégrable dans $[1, R]$. Alors, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons clairement

$$|f_n(x)| \leq h(x)\mathbf{1}_{[1,R]}(x)|\psi(x)| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi'(y)|h(x)\mathbf{1}_{[1,R]}(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Le Théorème de la convergence dominée assure par passage à la limite que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_1^R h(x)\psi(x)dx.$$

En revenant dans l'expression (2) par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(\varphi) = \lim_{n\to+\infty}\Big\{\int_{1+\frac{1}{n}}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx + -2\sqrt{n}\varphi(1)\Big\} = -2(R-1)^{-\frac{1}{2}}\varphi(1) + \int_1^R h(x)\psi(x)dx. \tag{2}$$

Notons cette limite $< u, \varphi > \in \mathbb{C}$. On définit ainsi une application $u \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$. Cette application est linéaire grâce aux propriétés de l'intégrale. Prouvons qu'elle est continue pour la topologie de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.
Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$. Alors il existe $R(K) > 1$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset K \subset [-R(K), R(K)]$ et $\displaystyle\int_1^{R(K)} h(x)dx = \int_1^{R(K)} (x-1)^{-\frac{1}{2}} = 2(R(K)-1)^{\frac{1}{2}}$, d'où

$$|< u, \varphi >| \leq 2(R(K)-1)^{-\frac{1}{2}}|\varphi(1)| + \sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi'(y)|2(R(K)-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Soit

$$p_{K,1}(\varphi) = \max_{0\leq k\leq 1}\{\sup_{x\in K}|\varphi^{(k)}(x)|\} = \max\{\sup_{x\in K}|\varphi(x)|,\ \sup_{x\in K}|\varphi'(x)|\}.$$

Alors, Il s'en suit que si on pose $C_K = 2(R(K)-1)^{-\frac{1}{2}} > 0$, alors pour tout K compact de $\mathbb{R}$, il existe $C_K > 0$ et $m = 1$ tel que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$, on ait

$$|< u, \varphi >| \leq C_K p_{K,1}(\varphi).$$

la forme linéaire u est bien continue pour la topologie de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, c'est donc une distribution sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $I\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $I(x) = x - 1$. C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$., la distribution $I.u$ multiplication d'une distribution avec une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ est définie par

$$< I.u, \varphi > = < u, I\varphi > = \lim_{n\to+\infty} \Big(\int_{1+\frac{1}{n}}^{+\infty} g(x)I(x)\varphi(x)dx - 2\sqrt{n}(I\varphi)(1)\Big).$$

Mais $(I.\varphi)(1) = I(1)\varphi(1) = (1-1)\varphi(1) = 0$ et si $x > 1$, on a $g(x)I(x) = (x-1)^{-\frac{3}{2}}(x-1) = (x-1)^{-\frac{1}{2}} = h(x)$, d'où

$$< I.u, \varphi > = \lim_{n\to+\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^{+\infty} h(x)\varphi(x)dx.$$

Comme la fonction $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, une application du Théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions intégrables $(h_n)_{n\geq 1}$ définie par $h_n(x) = h(x)\mathbf{1}_{[1+\frac{1}{n}],R}\varphi(x)$ montre que

$$< I.u, \varphi > = \lim_{n\to+\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^{+\infty} h(x)\varphi(x)dx = \int_1^R (x-1)^{\frac{1}{2}}\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)dx = < T_h, \varphi > .$$

Finalement on a prouvé que $I.u = T_h \quad (\mathscr{D}'(\mathbb{R}))$.

(3) Soit $v := T_h$ la distribution associée à la fonction h. Évaluons la distribution $\frac{d}{dx}v$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. On a

$$< \frac{d}{dx}v, \varphi > = - < T_h, \varphi' > = - \int_1^{+\infty} (x-1)^{-\frac{1}{2}}\varphi'(x)dx.$$

Comme le support de la fonction φ est compact dans $\mathbb{R}$ et $\operatorname{supp}\varphi' \subset \operatorname{supp}\varphi$. Alors il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq R$ alors $\varphi(x) = \varphi'(x) = 0$. Il s'en suit que

$$< \frac{d}{dx}v, \varphi > = - \int_1^{R} (x-1)^{-\frac{1}{2}}\varphi'(x)dx.$$

Comme la fonction $x \mapsto (x-1)^{-\frac{1}{2}}$ n'est pas dérivable dans l'intervalle $[1, R]$, on ne peut pas effectuer une intégration par parties dans cet intervalle . Mais en utilisant le Théorème de la convergence dominée comme précédemment à la suite $(h\mathbf{1}_{[1+\frac{1}{n}]}\varphi')_{n\geq 1}$, on peut écrire

$$< \frac{d}{dx}v, \varphi > = - \lim_{n\to+\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^{R} (x-1)^{-\frac{1}{2}}\varphi'(x)dx.$$

En effectuant une intégration par parties dans l'intervalle $[1+\frac{1}{n}, R]$, justifiée maintenant, on a

$$\begin{aligned}
\int_{1+\frac{1}{n}}^{R} (x-1)^{-\frac{1}{2}}\varphi'(x)dx &= [(x-1)^{-\frac{1}{2}}\varphi(x)]_{x=1+\frac{1}{n}}^{x=R} + \frac{1}{2}\int_{1+\frac{1}{n}}^{R} (x-1)^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{1+\frac{1}{n}}^{R} (x-1)^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)dx - \sqrt{n}\varphi(1+\frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{2}\{\int_{1+\frac{1}{n}}^{R} (x-1)^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)dx - 2\sqrt{n}\varphi(1)\} - \sqrt{n}\{\varphi(1+\frac{1}{n}) - \varphi(1)\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Or, en utilisant la formule de Taylor 1 pour la fonction φ en 1 à l'ordre 1 au point $x = 1 + \frac{1}{n}$, nous avons $\varphi(1+\frac{1}{n}) - \varphi(1) = \frac{1}{n}\psi(1+\frac{1}{n})$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \big(\sqrt{n}(\varphi(1+\frac{1}{n}) - \varphi(1)\big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}\psi(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\psi(1+\frac{1}{n}) = 0$, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{n\to+\infty} \psi(1+\frac{1}{n}) = \psi(1) = \varphi'(1)$. Finalement par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'expression (3),

$$< \frac{d}{dx}v, \varphi > = -\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\{\int_{1+\frac{1}{n}}^{R} (x-1)^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)dx - 2\sqrt{n}\varphi(1)\} = -\frac{1}{2} < u, \varphi >,$$

c'est à dire que au sens des distributions $\frac{d}{dx}v = -\frac{1}{2}u \quad (\mathscr{D}'(\mathbb{R}))$.

(4) Nous venons de voir que au sens des distributions $\frac{d}{dx}v = -\frac{1}{2}u \quad (\mathscr{D}'(\mathbb{R}))$, et $I.u = v \quad (\mathscr{D}'(\mathbb{R}))$. donc $2I\frac{d}{dx}v = -I.u = -v \quad (\mathscr{D}'(\mathbb{R}))$, c'est à dire que la distribution v vérifie $2I\frac{d}{dx}v + v = 0 \quad (\mathscr{D}'(\mathbb{R}))$.

□

Le Chargé de Cours de la Matière *24.01. 2019*
Mokrane A.Z.