

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE BATNA 2
MUSTAPHA BEN BOULAIID



Faculté de Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du diplôme de Master2

Option : Équations aux Dérivées Partielles et Applications

*Stabilité Locale et Stabilité Globale d'un Modèle Épidémique
de Diffusion à Incidence Non linéaire*

Présenté par :

Amira Ghodbane

Romaissa Merouani

Devant le jury d'examen composé de :

<i>Mohamed Zerguine</i>	<i>Pr</i>	Université de Batna 2	Président
<i>Amar Youkana</i>	<i>Pr</i>	Université de Batna 2	Encadreur
<i>Asma Touil</i>	<i>Pr</i>	Université de Batna 2	Examinatrice

2021/2022

Dédicace

Nous dédions ce modeste mémoire à :

Nos parents,

Nos frères,

Nos soeurs,

Nos amis,

Et à tous ceux qui nous sont chers et proches.

Amira ♥ Romaiissa

Remerciements

Au nom d'Allah, le tout Miséricordieux, le très Miséricordieux

*Nous remercions tout d'abord **Allah** de nous avoir donné la volonté, la santé et le courage pour mener à termine ce mémoire.*

*Un remerciement particulier à monsieur **Amar Youkana** pour son aide, aussi pour ses bons conseils et ses encouragements durant cette période.*

Nous adressons nos sincères remerciements aux membres du jury qu'ont accepté d'évaluer ce travail et tous les enseignants du département de mathématiques.

Nous remercions nos très chers parents, qui ont toujours été là pour nous. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Nous tenons enfin à remercier tous les amies et tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Résultats Préliminaires	5
1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz	6
1.2 Théorème de Hille-Yosida	7
1.2.1 Opérateurs accréatifs, m accréatifs dans un espace de Banach	7
2 Système d'EDO	10
2.1 Existence globale	11
2.1.1 Existence locale	11
2.1.2 Région invariante	12
2.2 Stabilité locale	14
2.2.1 Existence de points d'équilibre et nombre de reproduction de base R_0	14
3 Système d'EDP	22
3.1 Existence locale	22
3.2 Existence globale	24
3.3 La stabilité de l'EDP	28
3.3.1 Stabilité locale	28
3.3.2 Stabilité asymptotique globale	31
3.3.3 Remarque importante (Stabilité globale pour l'EDO)	38
4 Applications et exemples numériques	40
4.1 Premier exemple	40

TABLE DES MATIÈRES

4.2	Deuxième exemple	43
4.3	Troisième exemple	49
	Conclusion	55
	Bibliographie	55

Notations

- $x = (x_1, \dots, x_n)$: Élément de \mathbb{R}^n .
- Ω : Un ouvert de \mathbb{R}^n .
- $\partial\Omega$: Le bord de Ω .
- $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, +\infty)$.
- ν est l'unité extérieure normale à $\partial\Omega$.
- $L^\infty(\Omega)$: L'ensemble de fonctions bornées p.p sur Ω .
- $L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et tel que } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$.
- $\overline{\Omega}$: La fermeture de Ω .
- $C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{k-1}(\overline{\Omega}) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\overline{\Omega}), i = 1, \dots, n\}$.
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$: Gradient de u .
- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$: Laplacien de u .
- $\partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$: La dérivée partielle de u par rapport à x_i .
- $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2(t, x) dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
- $\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C ; |u(t, x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$
- $\|u(t, \cdot)\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(t, x)|$
- \tilde{A} : Opérateur illimité.
- $D(\tilde{A})$: Domaine de \tilde{A} .

Introduction Générale

Dans ce manuscrit, nous considérons le phénomène épidémique de réaction-diffusion proposé dans [10] qui est une version étendue du modèle épidémique SIS avec l'incidence non linéaire $u\varphi(v)$. Le système est décrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = \Lambda - \mu u - \lambda u \varphi(v) := F(u, v) & \text{sur } (0, \infty) \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = -\sigma v + \lambda u \varphi(v) := G(u, v) & \text{sur } (0, \infty) \times \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Tout au long de ce mémoire, la notation Δ désigne l'opérateur Laplacien sur Ω , où Ω est un sous-ensemble ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n à frontière $\partial\Omega$. Les paramètres $d_1, d_2 > 0$ sont les coefficients de diffusion. On suppose que les conditions initiales

$$u_0(x) = u(0, x), \quad v_0(x) = v(0, x) \quad \text{sur } \Omega, \quad (2)$$

sont dans $C(\overline{\Omega})$ et on impose des conditions aux limites de type Neumann homogènes

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } (0, \infty) \times \partial\Omega. \quad (3)$$

On supposera aussi que les conditions initiales $u_0(x), v_0(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Le système considéré (1)-(3) peut décrire la transmission d'une maladie transmissible entre individus comme le VIH/SIDA. La population supposée dans le modèle est divisée en deux classes, sensibles et infectieuses [13]. Les fonctions $u(t, x)$ et $v(t, x)$ désignent les densités de population non dimensionnelles des individus sensibles et infectieux au temps t et à l'emplacement x respectivement. Le paramètre constant $\Lambda > 0$ représente la croissance moyenne des différentes catégories de susceptibles, que ce soit par la naissance ou la migration, parfois appelée taux de recrutement de la population. En outre μ désigne le taux de mortalité naturelle, λ est la vitesse à laquelle les susceptibles se transforment en infectieux et σ est la vitesse à laquelle les infectives guérissent de la maladie.

Introduction Générale

Pour les besoins de cette étude, nous supposons que $\mu, \sigma, \lambda > 0$. La fonction d'incidence $\varphi(v)$ introduit une relation non linéaire entre les deux classes d'individus. Nous supposons φ être une fonction continûment différentiable sur \mathbb{R}^+ satisfaisant à

$$\varphi(0) = 0 \quad (4)$$

et

$$0 < v\varphi'(v) \leq \varphi(v) \quad \text{pour tout } v > 0. \quad (5)$$

Les maladies infectieuses sont la principale cause de décès chez tous les organismes vivants.

L'étude de l'épidémiologie a attiré l'attention d'un grand nombre de chercheurs dans le but d'améliorer le traitement de ces maladies grâce à la planification et aux prévisions de la propagation de la maladie, réduisant ainsi les taux de mortalité.

Dans [15], Hethcote a étudié un modèle simple résultant des incidences bilinéaires et standard $u\varphi(v) = \lambda uv$ avec $d_1 = d_2 = 0$ et a prouvé que les régions de stabilité asymptotique pour les points d'équilibre dépendent du nombre de reproduction de base. Des travaux et résultats similaires peuvent être trouvés dans [6],[18],[27],[3]. Les incidences non linéaires de la forme $u\varphi(v)$ ont été étudiées dans [7],[4],[25],[16],[5]. Cependant, ces études n'ont considéré que le cas simple sans diffusion, qui ne tient pas compte de la distribution des individus dans leur domaine spatial respectif. Dans [7], les auteurs ont proposé un modèle mathématique d'épidémie avec une incidence saturée $S\varphi(I)$ qu'ils ont utilisé pour étudier la propagation du choléra. L'étude a donné la positivité, l'existence globale et l'unicité de la solution du système ainsi que la stabilité asymptotique des points d'équilibre en utilisant une extension de la théorie des seuils. Les auteurs ont considéré comme exemple chiffré le cas

$$\varphi(I) = \frac{kI}{1 + \left(\frac{I}{\alpha}\right)}, k > 0, \alpha > 0.$$

Dans [35], Webb a établi l'existence de solution $(S(t, \cdot), I(t, \cdot), R(t))$ pour un modèle SIR spatialement de diffusion avec $\Lambda = \mu = 0$, $d_1 = d_2$ et $\varphi(v) = \lambda v$ dans l'unidimensionnel ($n = 1$) région spatiale $[-L, L]$. En utilisant la théorie des semi-groupes linéaires et non linéaires dans les espaces de Banach et les techniques de stabilité de Lyapunov pour les systèmes dynamiques dans les espaces métriques, les auteurs ont analysé

le comportement des solutions lorsque le temps tend vers l'infini et ont montré que $(S(t, \cdot), I(t, \cdot), R(t, \cdot)) \rightarrow (S_\infty, 0, R_\infty)$ avec S_∞, R_∞ étant des fonctions constantes positives sur $[-L, L]$. Le même scénario a été considéré de nouveau dans la section trois de [17] mais avec $\Lambda, \mu > 0$.

Considérons un système d'oiseaux avec des conditions aux limites de Neumann homogènes, les auteurs ont étudié les bornes uniformes des solutions et la stabilité locale et globale des équilibres. Dans le but d'établir la stabilité globale, la fonction de Lyapunov

$$V(t) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left(S - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 + \frac{\Lambda}{\mu} I \right] dx$$

a été utilisée. Une enquête similaire a été menée dans [9].

Un modèle d'infection entrecroisé décrivant la propagation du FIV a été proposé et étudié dans [11]. Ce modèle relève de (1) avec $n \geq 1, d_i > 0, \Lambda = \mu = 0$ et incidence bilinéaire $u\varphi(v) = \lambda uv$. Une autre étude importante est [4], où la stabilité asymptotique locale et globale du modèle épidémiologique simple avec $\varphi(v) = \beta[1 + \varphi_\eta(v)]v$ ont été étudiés au moyen de la théorie de l'indice de Poincaré. L'étude a montré que le nombre de reproduction de base est indépendant de la fonction $\varphi_\eta(v)$. Des fonctions de Lyapunov ont été proposées dans [19] pour les modèles EDO SIS et SEIR avec taux d'incidence $\varphi(v)g(u)$ et $\Lambda = \mu \geq 0$. Les mêmes auteurs ont généralisé le taux d'incidence à la forme très générale $f(u, v)$ et $\Lambda = \mu \geq 0$ dans [20]. En utilisant des fonctions de Lyapunov étendues basées sur celles construites dans [19], ils ont établi la stabilité asymptotique globale.

Des incidences non linéaires plus sophistiquées de la forme $k \frac{vu}{1+\delta v}$ ont été étudiés dans [23],[8], où les auteurs ont considéré un modèle de grippe aviaire et ont prouvé que la stabilité asymptotique globale dépend du nombre de reproduction de base.

Une fonction de Lyapunov plus générale a été développée dans [25] et utilisée pour établir l'existence d'un équilibre endémique pour les modèles EDO SIS avec l'incidence non linéaire $\varphi(v) = \lambda u\varphi(v)$.

De plus, un modèle épidémique SIR spatialement de diffusion avec deux scénarios ($d_1 = 0, d_2 > 0$) et ($d_1 > 0, d_2 = 0$) a été supposé dans [22] avec tous les paramètres étant spatialement hétérogènes, où $\varphi(v) = \lambda(x)v$ et $\sigma(\cdot), \mu(\cdot), \gamma(\cdot), \lambda(\cdot) \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ sont tous strictement positifs. La stabilité asymptotique globale de $E_0 = \left(\frac{b(x)}{\beta(x)}, 0 \right)$ et $E^* = (S^*(x), I^*(x))$ a été étudiée et les auteurs ont conclu que les comportements dynamiques de seuil standard dépendent du nombre de reproduction de base. Plus récemment, les auteurs de [16]

Introduction Générale

ont étudié la stabilité de l'équilibre sans maladie et l'équilibre endémique unique pour un modèle épidémiologique EDO SITAR avec un taux d'incidence général non linéaire $u\varphi(v)$ a en utilisant l'approche géométrique.

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence des points d'équilibre et leurs conditions de stabilité asymptotique pour le modèle épidémique de diffusion avec une incidence non linéaire.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Le premier ¹ chapitre contient quelques outils nécessaires qui aident à faire ce travail comme le théorème des accroissements finis, le lemme de Granwall, ... etc.

Nous avons également cité les deux théorèmes les plus importantes, le théorème de Cauchy Lipschitz et le théorème de Hille-Yosida. Dans le deuxième ² chapitre, nous étudions l'existence locale et globale de la solution du problème d'EDO et nous définirons également le nombre reproduction de base R_0 du modèle proposé et nous établirons l'existence de deux équilibres. La stabilité asymptotique locale et l'instabilité de l'équilibre sans maladie et de l'équilibre endémique seront étudiées. Dans le troisième ³ chapitre nous établirons l'existence locale et globale de la solution du problème (1)-(3) et nous montrerons également que les deux états stationnaires du modèle sont globalement asymptotiquement stables en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov appropriée. Enfin, dans le dernier ⁴ chapitre, nous présenterons quelques exemples numériques pour valider l'analyse théorique présentée tout au long de ce mémoire.

Chapitre 1

Résultats Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques résultats préliminaires et classiques qui vont nous servir dans la suite de l'étude.

Théorème 1.1 (Théorème des accroissements finis). *On considère $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Preuve. On considère la fonction F définie sur $[a, b]$ par l'identité

$$F(x) = (f(b) - f(a))(x - b) - (b - a)(f(x) - f(a)), \quad x \in [a, b].$$

Par somme et produit de fonctions continues et dérivables, F est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus $F(a) = F(b) = (f(b) - f(a))(a - b)$.

Par conséquent, d'après le théorème de Rolle, on obtient l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$. Il reste à remarquer que

$$\begin{aligned} F'(c) = 0 &\Leftrightarrow (f(b) - f(a)) - (b - a)f'(c) = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

□

Théorème 1.2 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$.*

Si la condition $f(a) \cdot f(b) < 0$ est vérifiée, alors il existe un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Lemme 1.1. Si f une fonction continue dans un voisinage de x_0 et si $f(x_0) < 0$, alors $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, f(x) < 0$.

Preuve. Soient $a, b \in I$ tels que : $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Supposons par exemple que $f(a) > 0, f(b) < 0$.

Soit $c = \sup E$, où $E = \{x \in [a, b], f(x) \geq 0\}$ et montrons que $f(c) = 0$.

On a : $a < c < b$ si $f(c) \neq 0$. D'après le lemme 1.1 il existe un intervalle $]c - \delta, c + \delta[$ tel que f conserve la signe de $f(c)$ sur cet intervalle or $c = \sup E$.

Donc contradiction c'est à dire que $f(c) = 0$.

□

Lemme 1.2. [Lemme de Gronwall] Soient $u, v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues et soit $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs dans \mathbb{R} telle que

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t u(\tau)v(\tau)d\tau ; \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors,

$$u(t) \leq c(t)e^{\int_0^t v(\tau)d\tau} ; \quad \forall t \in [0, T].$$

1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Problème de Cauchy

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), & t \in I \subset \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \in I, x_0 \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ici I un intervalle non vide de $\mathbb{R}, x \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction inconnue définie sur I à valeurs dans Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction donnée.

• On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à x s'il existe un voisinage V de $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ telle que

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in V, \exists l > 0, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\|.$$

1.2 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.3 (Théorème de Cauchy Lipschitz). Soit le problème de Cauchy (1.1)

- i) Si f est continue sur $I \times \Omega$.
- ii) Si f est localement lipschitzienne par rapport à x , alors il existe une unique solution du problème (1.1) définie sur $J = (t_0 - \tau, t_0 + \tau) \subset I$ (avec $\tau > 0$).

Preuve. Voir[46] □

1.2 Théorème de Hille-Yosida

1.2.1 Opérateurs accréatifs, m accréatifs dans un espace de Banach

Soit X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire.

Définition 1.1. On dit que A est accréatif dans X si

$$\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0 : \|u\|_X \leq \|u + \lambda Au\|_X.$$

Définition 1.2. On dit que A est maximal accréatif dans X si

- (i) A est accréatif.
 - (ii) $\mathcal{R}(I + A) = X$.
- i.e $\forall v \in X, \exists ! w \in D(A) / w + Aw = v$.

Théorème 1.4 (Théorème de Hille-Yosida). Soit le problème d'évolution

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f, & t > 0, x \in \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases} \quad (\text{P})$$

Si A est maximal accréatif dans X et f est localement Lipschitzienne, alors $\forall u_0 \in D(A), \exists ! u$ solution locale de (P) définie sur $(0, T) \times \Omega$.

Fonctionnelle de Lyapunov

La fonctionnelle de Lyapunov est un outil qui sert souvent à l'étude de la stabilité des points d'équilibre des équations différentielles ordinaires ou bien aux dérivées partielles.

On dit que $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour un système ordinaire si :

1.2 Théorème de Hille-Yosida

- (i) $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii) $V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- (iii) $\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in (0, +\infty)$.

Proposition 1.1 (Sur la trace et le déterminant d'une matrice).

Soit $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

- (i) $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.
- (ii) $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Principe du maximum

Considérons le problème (P).

On multiplie la 1^{ère} équation de (P) par $(-u^-)$ ou bien par (u^+) et selon la donnée initiale, on peut parfois déduire des propriétés sur la solution telles que la positivité ou bien le bornage de cette solution.

où :

$$u^+ = \sup(u, 0) = \begin{cases} u & \text{si } u \geq 0 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases}$$

et

$$u^- = \sup(-u, 0) = \begin{cases} -u & \text{si } u \leq 0 \\ 0 & \text{si } u \geq 0. \end{cases}$$

Propriétés

1. $u = u^+ - u^-$
2. $|u| = u^+ + u^-$
3. $u^+ u^- = 0$
4. $u^+ \geq 0, u^- \geq 0$.

Formule de Green :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1 par morceaux, soient $u \in H^2(\Omega)$ et $w \in H^1(\Omega)$, alors on a

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)w(x)dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla w(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)w(x)ds.$$

1.2 Théorème de Hille-Yosida

où : $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial \nu_i} \nu_i(x)$ est la dérivée normale de u .

Chapitre 2

Système d'EDO

Dans ce chapitre, nous allons étudier la stabilité locale du système aux équations différentielles ordinaires découlant du système (1)-(3).

Supposons que les conditions initiales $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Notez que pour $(u, v) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$, on a

$$\begin{cases} F(0, v) = \Lambda > 0 \\ G(u, 0) = 0, \end{cases}$$

ce qui rend la fonction $(F, G)^T$ essentiellement non négative. Par conséquent, le quadrant non négatif $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ est un ensemble invariant, voir [[12], [28], Proposition 2.1]. En supprimant la variable spatiale, le système proposé se réduit au système d'équations différentielles ordinaires (EDO) suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u, v) & \text{sur } (0, \infty) \\ \frac{dv}{dt} = G(u, v) & \text{sur } (0, \infty), \end{cases} \quad (2.1)$$

avec conditions initiales

$$u(0) = u_0 \geq 0, \quad v(0) = v_0 \geq 0. \quad (2.2)$$

Dans les sous-sections suivantes, nous définissons une région invariante pour le système, identifions les équilibres du système et leur relation avec le nombre de reproduction de base R_0 , établir l'existence globale de solution dans le temps et étudier la stabilité locale du système dans les EDO et EDP.

2.1 Existence globale

2.1.1 Existence locale

On va montrer que le système (2.1)-(2.2) admet une solution unique locale définie sur $(0, T_{max}) \times \Omega$.

On a par définition :

$$\begin{cases} F(u, v) = \Lambda - \mu u - \lambda u \varphi(v) \\ G(u, v) = -\sigma v + \lambda u \varphi(v). \end{cases}$$

- F et G sont continues sur $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ (car φ est une fonction continue sur \mathbb{R}^+).
- F est localement lipschitzienne par rapport à u et par rapport à v . En effet,

En dérivant F par rapport à u , on trouve

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial u} \right| &= |-\mu - \lambda \varphi(v)| \\ &\leq \mu + \lambda \varphi(v). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

φ est continue sur $[0, v]$, et dérivable sur $]0, v[$. Alors d'après le théorème des accroissements finis $\exists c \in]0, v[$ tel que : $\varphi(v) - \varphi(0) = \varphi'(c)(v - 0)$.

et d'après (4), on obtient : $\varphi(v) = \varphi'(c)v$.

Par suite,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial u} \right| &\leq \mu + \lambda v |\varphi'(c)| \\ &\leq C_{1_{loc}} \end{aligned}$$

En dérivant F par rapport à v , on trouve :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial v} \right| &= |-\lambda u \varphi'(v)| \\ &\leq \lambda u |\varphi'(v)| \end{aligned}$$

D'après (5), on obtient :

$$\left| \frac{\partial F}{\partial v} \right| \leq \lambda u \frac{|\varphi(v)|}{v}$$

et d'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction φ , on trouve

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial v} \right| &\leq \lambda u |\varphi'(c)| \\ &\leq C_{2_{loc}}. \end{aligned}$$

2.1 Existence globale

Donc les dérivées partielles F_u et F_v sont localement bornées.

D'où le résultat.

- G est localement Lipschitzienne par rapport à u et par rapport à v . En effet, similairement, en dérivant G par rapport à u , on trouve

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G}{\partial u} \right| &= |\lambda \varphi(v)| \\ &\leq C_{3_{loc}}. \end{aligned}$$

En dérivant G par rapport à v , on trouve

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G}{\partial v} \right| &= |-\sigma + \lambda u \varphi'(v)| \\ &\leq \sigma + \lambda u |\varphi'(v)| \\ &\leq C_{4_{loc}}. \end{aligned}$$

Donc les dérivées partielles G_u et G_v sont localement bornées.

D'où par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système (2.1)-(2.2) admet une solution unique locale définie sur $(0, T_{max}) \times \Omega$.

2.1.2 Région invariante

Tout au long de ce mémoire, nous laissons $N = u + v$ et $\sigma_0 = \min(\sigma, \mu)$. Nous définissons également la région

$$D = \left\{ (u, v) : u, v \geq 0 \text{ et } u + v \leq \frac{\Lambda}{\sigma_0} \right\}.$$

La proposition suivante montre que D est une région invariante du système (2.1)-(2.2).

Proposition 2.1. *La région D est non vide, attractive et positivement invariante.*

Preuve. On commence par additionner les équations du système (2.1)-(2.2), ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} &= F(u, v) + G(u, v) \\ &= 1 - \mu u - \lambda u \varphi(v) - v + \lambda u \varphi(v) \\ &= 1 - \mu - v. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(u + v) = 1 - (\mu u + v).$$

2.1 Existence globale

Comme $N = u + v$ et $\sigma_0 = \min(\sigma, \mu)$ alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}N(t) &= 1 - (\mu u + v) \\ &\leq 1 - \min(\sigma_0, \mu)(u + v) \\ &= 1 - (u + v).\end{aligned}$$

Par suite, $\frac{d}{dt}N(t) \leq 1 - N$.

Maintenant, par une intégration de la dernière inégalité sur $[0, t]$, on aura

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{ds}N(s) ds &\leq \int_0^t (1 - \sigma_0 N(s)) ds \\ N(t) - N(0) &\leq \int_0^t (-\sigma_0 N(s) + 1) ds \\ N(t) &\leq N(0) + \int_0^t (-\sigma_0 N(s) + 1) ds.\end{aligned}$$

D'où, par application du lemme de Gronwall^{1.2}, on aboutit à

$$\begin{aligned}N(t) &\leq N_0 e^{-\sigma_0 t} + 1 \int_0^t e^{-\sigma_0(t-s)} ds, \forall t \geq 0 \\ &= N_0 e^{-\sigma_0 t} + 1 e^{-\sigma_0 t} \int_0^t e^{-\sigma_0 s} ds \\ &= N_0 e^{-\sigma_0 t} + 1 e^{-\sigma_0 t} \left[\frac{e^{-\sigma_0 s}}{-\sigma_0} \right]_0^t \\ &= N_0 e^{-\sigma_0 t} + 1 e^{-\sigma_0 t} \left(\frac{e^{-\sigma_0 t}}{-\sigma_0} - \frac{1}{-\sigma_0} \right).\end{aligned}$$

Cela implique que

$$N(t) \leq \frac{\Lambda}{\sigma_0} (1 - e^{-\sigma_0 t}) + N_0 e^{-\sigma_0 t}, \forall t \geq 0.$$

En remplaçant la valeur de N , on aura

$$(u + v)(t) \leq \frac{\Lambda}{\sigma_0} (1 - e^{-\sigma_0 t}) + (u + v)(0) e^{-\sigma_0 t},$$

pour $t \geq 0$. Si les états initiaux satisfont $(u + v)(0) \leq \frac{\Lambda}{\sigma_0}$, alors

$$\begin{aligned}(u + v)(t) &\leq \frac{1}{\sigma_0} (1 - e^{-\sigma_0 t}) + \frac{1}{\sigma_0} e^{-\sigma_0 t} \\ &= \frac{\Lambda}{\sigma_0} - \frac{\Lambda}{\sigma_0} e^{-\sigma_0 t} + \frac{\Lambda}{\sigma_0} e^{-\sigma_0 t}.\end{aligned}$$

2.2 Stabilité locale

Par suite,

$$(u + v)(t) \leq \frac{\Lambda}{\sigma_0}, \quad \forall t \geq 0$$

et

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} (u + v)(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Lambda}{\sigma_0} = \frac{\Lambda}{\sigma_0}.$$

D'où

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\sigma_0}.$$

Ainsi, pour tout $t \in (0, T_{max})$,

$$u(t, x) \leq \frac{\Lambda}{\sigma_0}$$

et

$$v(t, x) \leq \frac{\Lambda}{\sigma_0}.$$

Par conséquent, u et v sont uniformément bornés sur $(0, T_{max}) \times \Omega$.

On déduit que $T_{max} = +\infty$.

D'où, le système (2.1)-(2.2) admet une solution unique globale définie sur $(0, \infty) \times \Omega$.

Alors, la région D est positivement invariante et attractive dans $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Il suffit donc de considérer la dynamique du modèle dans D comme D est la région biologiquement réalisable du système où les résultats d'existence et d'unicité sont valables pour le système. □

2.2 Stabilité locale

2.2.1 Existence de points d'équilibre et nombre de reproduction de base R_0

Dans cette section, nous envisageons à montrer l'existence de solutions d'équilibre pour (1)-(2) et à calculer le nombre de reproduction de base.

Théorème 2.1. *Le système (2.1)-(2.2) a un seul équilibre sans maladie $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$. Si le nombre de reproduction de base $R_0 = \frac{\Lambda\lambda}{\mu\sigma} \varphi'(0) > 1$, alors le système admet deux équilibres distincts : E_0 et l'endémie positive équilibre $E^* = (u^*, v^*) \in \mathbb{R}_{>0}^2$.*

2.2 Stabilité locale

Preuve. Les équilibres positifs du modèle (2.1)-(2.2) satisfont

$$\begin{cases} F(u, v) = \Lambda - \lambda u \varphi(v) - \mu u = 0, \\ G(u, v) = \lambda u \varphi(v) - \sigma v = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

• Si $u = 0$ alors,

$$\begin{cases} F(0, v) = \Lambda \\ G(0, v) = -\sigma v. \end{cases}$$

Mais,

$$\begin{cases} F(0, 0) = \Lambda \neq 0 \\ G(0, 0) = 0. \end{cases}$$

D'où ce système n'a pas d'équilibre.

• Si $v = 0$ alors,

$$\begin{cases} F(u, 0) = \Lambda - \mu u \\ G(u, 0) = 0. \end{cases}$$

$$F(u, 0) = 0 \Rightarrow \Lambda - \mu u = 0$$

$$\Rightarrow \Lambda = \mu u$$

$$\Rightarrow u = \frac{\Lambda}{\mu}.$$

D'où, $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ est le seul point d'équilibre pour le système (2.1)-(2.2). Ensuite, nous étudions les conditions d'existence d'un état stationnaire endémique dans le cas $v > 0$.

D'après la deuxième partie de (2.3) et parce que $\lambda > 0$ et $\varphi(v) > 0$, on obtient

$$u = \frac{\sigma v}{\lambda \varphi(v)}.$$

En remplaçant cela dans la première équation, on obtient

$$\Lambda - \frac{\lambda \sigma v}{\lambda \varphi(v)} \varphi(v) - \mu \frac{\sigma v}{\lambda \varphi(v)} = 0$$

$$\Lambda - \sigma v - \mu \frac{\sigma v}{\lambda \varphi(v)} = 0.$$

En multipliant cette dernière équation par $\frac{\lambda \varphi(v)}{\mu \sigma v}$, on obtient

$$\frac{\Lambda \lambda}{\mu \sigma} \cdot \frac{\varphi(v)}{v} - \frac{\sigma \lambda}{\mu \sigma} \cdot \varphi(v) - 1 = 0.$$

2.2 Stabilité locale

On pose ,

$$h(v) = \frac{\Lambda \lambda}{\mu \sigma} \cdot \frac{\varphi(v)}{v} - \frac{\sigma \lambda}{\mu \sigma} \varphi(v) - 1.$$

Donc,

$$h(v) = 0 \quad \text{pour tout } v > 0. \quad (2.4)$$

h est continue pour tout $v > 0$. il clair que

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} h(v) &= \lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{\Lambda \lambda}{\mu \sigma} \frac{\varphi(v)}{v} - \frac{\sigma \lambda}{\mu \sigma} \varphi(v) - 1 \right) \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Lambda \lambda}{\mu \sigma} \frac{\varphi(v)}{v} - 1 \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Lambda \lambda}{\mu \sigma} \varphi'(v) - 1 \\ &= R_0 - 1, \end{aligned}$$

où R_0 est le nombre de reproduction de base à identifier ensuite, on a

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \frac{\Lambda}{\sigma_0}} h(v) &= h\left(\frac{\Lambda}{\sigma_0}\right) = \frac{\Lambda \lambda}{\mu \sigma} \frac{\sigma_0}{\Lambda} \varphi\left(\frac{\Lambda}{\sigma_0}\right) - \frac{\sigma \lambda}{\mu \sigma} \varphi\left(\frac{\Lambda}{\sigma_0}\right) - 1 \\ &= \frac{\lambda \sigma_0}{\mu \sigma} \varphi\left(\frac{\Lambda}{\sigma_0}\right) - \frac{\sigma \lambda}{\mu \sigma} \varphi\left(\frac{\Lambda}{\sigma_0}\right) - 1 \\ &= \frac{\lambda(\sigma_0 - \sigma)}{\mu \sigma} \varphi\left(\frac{\Lambda}{\sigma_0}\right) - 1. \end{aligned}$$

Comme $\sigma_0 = \min(\sigma, \mu)$ alors $\sigma_0 \leq \sigma$

ensuite, $\sigma_0 - \sigma \leq 0$

Par suite,

$$\lim_{v \rightarrow \frac{\Lambda}{\sigma_0}} h(v) = h\left(\frac{\Lambda}{\sigma_0}\right) < 0.$$

Pour $R_0 > 1$, on a :

$$\lim_{v \rightarrow 0} h(v) = R_0 - 1 > 0.$$

Donc ,

$$h\left(\frac{\Lambda}{\sigma_0}\right) \lim_{v \rightarrow 0} h(v) = h\left(\frac{\Lambda}{\sigma_0}\right) (R_0 - 1) < 0.$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $v^* \in \left(0, \frac{\Lambda}{\sigma_0}\right)$ tel que (2.4) soit vérifié.

2.2 Stabilité locale

On peut montrer que la fonction h est strictement décroissante pour tout $v > 0$ comme suit,

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dv}(v) &= \frac{\Lambda\lambda}{\mu\sigma} \left(\frac{v\varphi'(v) - \varphi(v)}{v^2} \right) - \frac{\sigma\lambda}{\mu\sigma} \varphi'(v) \\ &= \frac{\Lambda\lambda[v\varphi'(v) - \varphi(v)] - \sigma\lambda v^2 \varphi'(v)}{\mu\sigma v^2}.\end{aligned}$$

D'après (5) on a : $v\varphi'(v) - \varphi(v) \leq 0$.

D'où

$$\frac{dh}{dv}(v) < 0.$$

Alors, il existe un réel unique $v^* \in (0, \frac{\Lambda}{\sigma_0})$ tel que $h(v^*) = 0$, ce qui implique l'existence d'un unique $u^* = \frac{\sigma v^*}{\lambda\varphi(v^*)}$. Notez que dans $(\frac{\Lambda}{\sigma_0}, +\infty)$ la deuxième équation de (2.3) n'a pas de solutions car

$$\max_{v \in (\frac{\Lambda}{\sigma_0}, +\infty)} h(v) \leq h\left(\frac{\Lambda}{\sigma_0}\right) < 0.$$

Ceci conclut la preuve. □

Dans la preuve précédente, nous avons utilisé le nombre de reproduction R_0 du système (2.1)–(2.2). Il est maintenant temps d'identifier sa valeur au moyen de la méthode des matrices de prochaine génération formulée dans [30] et décrite plus loin dans [[33], Lemme 1 page 32].

Les systèmes (2.1) à (2.2) peuvent être réécrits sous forme vectorielle comme

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_t \\ u_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda u \varphi(v) - \sigma v \\ \Lambda - \lambda u \varphi(v) - \mu u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u \varphi(v) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma v \\ -\Lambda + \lambda u \varphi(v) + \mu u \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Les matrices jacobiniennes correspondantes aux vecteurs $\begin{pmatrix} \lambda u \varphi(v) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sigma v \\ -\Lambda + \lambda u \varphi(v) + \mu u \end{pmatrix}$ au point d'équilibre libre $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ sont données respectivement par

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda\Lambda}{\mu} \varphi'(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Stabilité locale

et

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ \frac{\lambda\Lambda}{\mu}\varphi'(0) & \mu \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} V & 0 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de reproduction de base R_0 est simplement le rayon spectral de la matrice de prochaine génération

$$K = SV^{-1} = \left(\frac{\lambda\Lambda}{\mu}\varphi'(0) \right) (\sigma)^{-1} = \frac{\lambda\Lambda}{\mu\sigma}\varphi'(0)$$

qui est donné par

$$R_0 = \rho(SV^{-1}) = \frac{\Lambda\lambda}{\mu\sigma}\varphi'(0).$$

Maintenant que nous avons identifié deux états stationnaires constants pour le système (2.1)-(2.2), à savoir $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ et $E^* = (u^*, v^*)$, nous passons à l'étude de leur stabilité asymptotique locale comme décrit dans le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Pour le système (2.1)-(2.2) :*

- (i) *Si $R_0 < 1$, la solution d'équilibre libre $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ est le seul état stable du système et est localement asymptotiquement stable.*
- (ii) *Si $R_0 > 1$, E_0 est instable et l'état d'équilibre endémique constant positif $E^* = (u^*, v^*)$ est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. Pour prouver la stabilité asymptotique locale des états stationnaires constants, nous utiliserons la matrice Jacobienne qui est donnée par

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} F_u(u, v) & F_v(u, v) \\ G_u(u, v) & G_v(u, v) \end{pmatrix},$$

où F_u, F_v, G_u et G_v sont les premières dérivées partielles.

Évaluons les rendements des dérivées

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} -\lambda\varphi(v) - \mu & -\lambda u\varphi'(v) \\ \lambda\varphi(v) & \lambda u\varphi'(v) - \sigma \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

En évaluant $J(u, v)$ au point $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ et en utilisant (4) on obtient

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) \\ 0 & \lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) - \sigma \end{pmatrix}.$$

2.2 Stabilité locale

La stabilité locale de $E_0\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ repose sur la nature des valeurs propres correspondantes à $J(E_0)$.

Déterminant les valeurs propres de $J(E_0)$.

Pour cela, on calcule le polynôme caractéristique de $J(E_0)$.

On a

$$\begin{aligned}\det(J(E_0) - rI_2) &= \det\left(\begin{pmatrix} -\mu & -\lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) \\ 0 & \lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) - \sigma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{vmatrix} -\mu - r & -\lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) \\ 0 & \lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) - \sigma - r \end{vmatrix} \\ &= (-\mu - r)\left(\lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) - \sigma - r\right) \\ &= (\mu + r)\left(r - \lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) + \sigma\right).\end{aligned}$$

Remarquant que

$$r \text{ est une valeur propre de } J(E_0) \Leftrightarrow \det(J(E_0) - rI_2) = 0.$$

Par suite, $(\mu + r)\left(r - \lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) + \sigma\right) = 0$.

$$\begin{cases} \mu + r = 0 \\ \text{ou} \\ r - \lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) + \sigma = 0. \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} r_1 = -\mu < 0 \\ r_2 = \lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) - \sigma. \end{cases}$$

Nous distinguons deux cas :

Le premier cas :

• Si $R_0 < 1$ alors $\frac{\Lambda\lambda}{\mu\sigma}\varphi'(0) < 1$

ensuite, $\frac{\Lambda\lambda}{\mu}\varphi'(0) < \sigma$

Donc, $r_2 = \lambda\frac{\Lambda}{\mu}\varphi'(0) - \sigma < 0$.

D'où l'équilibre E_0 est localement asymptotiquement stable.

Le deuxième cas : si $R_0 > 1$.

2.2 Stabilité locale

L'équilibre E_0 est instable, car $r_2 = \lambda \frac{\Lambda}{\mu} \varphi'(0) - \sigma > 0$.

Mais le système possède un équilibre endémique positif $E^* = (u^*, v^*)$ où $u^*, v^* > 0$.

Depuis E^* satisfait (2.3), on a

$$\begin{cases} \Lambda = \lambda u^* \varphi(v^*) + \mu u^* \\ \sigma = \frac{\lambda u^* \varphi(v^*)}{v^*}. \end{cases} \quad (2.6)$$

En évaluant la matrice Jacobienne (2.5) au point $E^* = (u^*, v^*)$, on aura

$$J(u^*, v^*) = \begin{pmatrix} -\lambda \varphi(v^*) - \mu & -\lambda u^* \varphi'(v^*) \\ \lambda \varphi(v^*) & \lambda u^* \varphi'(v^*) - \sigma \end{pmatrix}$$

et donc la trace de $J(u^*, v^*)$ est

$$\begin{aligned} \text{tr}(J(u^*, v^*)) &= -\lambda \varphi(v^*) - \mu + \lambda u^* \varphi'(v^*) - \sigma \\ &= -(\lambda \varphi(v^*) + \mu) - \sigma + \lambda u^* \varphi'(v^*). \end{aligned} \quad (2.7)$$

En utilisant (2.6), cela peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} \text{tr}(J(u^*, v^*)) &= -\frac{(\lambda u^* \varphi(v^*) + \mu u^*)}{u^*} - \frac{\lambda u^* \varphi(v^*)}{v^*} + \lambda u^* \varphi'(v^*) \\ &= -\frac{\Lambda}{u^*} - \lambda u^* \left(\frac{\varphi(v^*)}{v^*} - \varphi'(v^*) \right) \end{aligned}$$

et d'après (5), on a $\frac{\varphi(v^*)}{v^*} \geq \varphi'(v^*)$.

Alors

$$\frac{\varphi(v^*)}{v^*} - \varphi'(v^*) \geq 0. \quad (2.8)$$

Donc

$$\text{tr}(J(u^*, v^*)) < 0.$$

Le déterminant du Jacobien peut être donné par

$$\begin{aligned} \det(J(u^*, v^*)) &= (-\lambda \varphi(v^*) - \mu)(\lambda u^* \varphi'(v^*) - \sigma) - \lambda \varphi(v^*)(-\lambda u^* \varphi'(v^*)) \\ &= -\lambda^2 u^* \varphi(v^*) \varphi'(v^*) + \lambda \sigma \varphi(v^*) - \mu \lambda u^* \varphi'(v^*) + \mu \sigma + \lambda^2 u^* \varphi(v^*) \varphi'(v^*). \end{aligned}$$

D'où, $\det(J(u^*, v^*)) = \lambda \sigma \varphi(v^*) + \mu \sigma - \mu \lambda u^* \varphi'(v^*)$.

En utilisant (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} \det(J(u^*, v^*)) &= \lambda \frac{\lambda u^* \varphi(v^*)}{v^*} \varphi(v^*) + \mu \frac{\lambda u^* \varphi(v^*)}{v^*} - \mu \lambda u^* \varphi'(v^*) \\ &= \frac{\lambda^2 u^* (\varphi(v^*))^2}{v^*} + \mu \lambda u^* \left[\frac{\varphi(v^*)}{v^*} - \varphi'(v^*) \right] \end{aligned}$$

2.2 Stabilité locale

et d'après (2.8), on obtient $\det(J(u^*, v^*)) > 0$.

D'où l'équilibre $E^* = (u^*, v^*)$ est localement asymptotiquement stable.

□

Chapitre 3

Système d'EDP

Maintenant, dans ce chapitre nous allons aborder la stabilité locale et la stabilité globale du système proposé (1)-(3) qui fait l'objet du travail de notre mémoire.

3.1 Existence locale

En supposant que la fonction φ satisfait les conditions (4)-(5), la proposition suivante établit que les solutions du système (1)-(3) existent globalement dans le temps et sont bornées par une constante dépendant des paramètres.

Mais d'abord, nous énonçons un lemme qui a été développé dans [2] et qui deviendra utile plus tard.

Lemme 3.1. *La condition (5) implique que*

$$0 < \frac{\varphi(v)}{v} \leq \varphi'(0) \quad \text{pour tout } v > 0. \quad (3.1)$$

Proposition 3.1. *Pour toutes données initiales non négatives $(u_0, v_0) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ la solution non négative $(u(t, x), v(t, x))$ du système (1)-(3) existe de manière unique et globale dans le temps. De plus, il existe une constante positive $\mathcal{C}(u_0, v_0, \Lambda, \mu, \lambda, \sigma)$ tel que $\forall t > 0$,*

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathcal{C}. \quad (3.2)$$

De plus, il existe une constante positive $\widetilde{\mathcal{C}}(\Lambda, \mu, \lambda, \sigma)$ tel que $\forall t \geq T$ pour certain grand $T > 0$,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \widetilde{\mathcal{C}}. \quad (3.3)$$

3.1 Existence locale

Preuve. Définissons $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ avec $\mathcal{Y} = C(\overline{\Omega})$. Étant donné

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

la norme sur \mathcal{X} est définie comme $\|\psi\| = \|\psi_1\|_{\mathcal{Y}} + \|\psi_2\|_{\mathcal{Y}}$.

D'où $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Définissons aussi l'opérateur illimité

$$\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$$

tel que

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (\tilde{A}_1 u, \tilde{A}_2 v)^T = (d_1 \Delta, d_2 \Delta)^T$$

et

$$D(\tilde{A}) = D(\tilde{A}_1) \times D(\tilde{A}_2),$$

avec

$$D(\tilde{A}_i) = \left\{ \varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : \tilde{A}_i \varphi \in C(\overline{\Omega}), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \right\}, \text{ pour } i = 1, 2.$$

On peut écrire les systèmes (1)-(3) sous forme abstraite dans \mathcal{X} comme

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = AU(t) + \Upsilon(U(t)), & t > 0, \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{X}, \end{cases}$$

où $U(t) = (u(t, \cdot), v(t, \cdot))^T$, $\Upsilon(U(t)) = (F(U(t)), G(U(t)))^T$ et $A = \text{diag}(A_1, A_2)$ dans lequel A_i est la fermeture de \tilde{A}_i dans \mathcal{Y} pour $i = 1, 2$.

L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique d'opérateurs linéaires bornés $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ au \mathcal{X} , [39]. Depuis Υ est localement Lipschitzienne en \mathcal{X} .

D'après le théorème de Hille-Yosida le système (1)-(3) admet une unique solution locale $(u(t, x), v(t, x))$ pour $t \in [0, T_{max})$ et $x \in \overline{\Omega}$, où T_{max} est le temps d'existence maximal, voir [40]. □

3.2 Existence globale

On a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = \Lambda - \mu u - \lambda u \varphi(v), & (0, T_{max}) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } (0, T_{max}) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

On peut facilement observer qu'il existe une solution supérieure pour (3.4) pour toutes fonctions positives u et v . Cette solution supérieure est donnée par

$$N_1 := \max \left\{ \frac{\Lambda}{\mu}, \|u_0\|_{C(\overline{\Omega})} \right\}.$$

En utilisant le principe du maximum pour obtenir $u(t, x) \leq N_1$, $\forall (t, x) \in (0, T_{max}) \times \overline{\Omega}$.

Pour cela, on multiplie la 1^{ère} équation de (3.4) par $(u - N_1)^+$ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} (u - N_1)^+ dx - d_1 \int_{\Omega} \Delta u (u - N_1)^+ dx &= \Lambda \int_{\Omega} (u - N_1)^+ dx - \mu \int_{\Omega} u (u - N_1)^+ dx \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} u \varphi(v) (u - N_1)^+ dx. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u - N_1)^+{}^2 dx + d_1 \int_{\Omega} |\nabla (u - N_1)^+|^2 dx \leq \Lambda \int_{\Omega} (u - N_1)^+ dx - \mu \int_{\Omega} u (u - N_1)^+ dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} u &= u - N_1 + N_1 \\ &= (u - N_1)^+ - (u - N_1)^- + N_1. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u - N_1)^+{}^2 dx &\leq \Lambda \int_{\Omega} (u - N_1)^+ dx - \mu \int_{\Omega} (u - N_1)^+{}^2 dx - \mu \int_{\Omega} N_1 (u - N_1)^+ dx \\ &\leq -\mu \int_{\Omega} \left(N_1 - \frac{\Lambda}{\mu} \right) (u - N_1)^+ dx. \end{aligned}$$

Comme $N_1 = \max \left\{ \frac{\Lambda}{\mu}, \|u_0\|_{C(\overline{\Omega})} \right\}$ alors, $N_1 \geq \frac{\Lambda}{\mu}$.

Donc $N_1 - \frac{\Lambda}{\mu} \geq 0$.

Par conséquent,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u - N_1)^+{}^2 dx \leq 0.$$

3.2 Existence globale

Maintenant, on intègre sur $[0, t]$

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \int_{\Omega} (u - N_1)^+{}^2 dx ds \leq 0,$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - N_1)^+{}^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_0 - N_1)^+{}^2 dx,$$

et on a $N_1 \geq \|u_0\|_{C(\overline{\Omega})} \geq u_0$.

Donc $u_0 - N_1 \leq 0 \implies (u_0 - N_1)^+ \equiv 0$.

D'où

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - N_1)^+{}^2 dx \leq 0.$$

Ensuite,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - N_1)^+{}^2 dx = 0.$$

$$(u - N_1)^+ \equiv 0 \quad \text{p.p.}$$

Comme $u \in C(\overline{\Omega})$ alors $(u - N_1)^+ \equiv 0$.

$$(u - N_1) = \underbrace{(u - N_1)^+}_{=0} - (u - N_1)^-$$

$$= -(u - N_1)^- \leq 0.$$

D'où $u(t, x) \leq N_1$ dans $[0, T_{max}) \times \overline{\Omega}$ et par conséquent, u est uniformément bornée dans $[0, T_{max}) \times \overline{\Omega}$.

En intégrant les équations de (1) sur Ω , on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dx - d_1 \int_{\Omega} \Delta u dx = \Lambda \int_{\Omega} dx - \mu \int_{\Omega} u dx - \lambda \int_{\Omega} u \varphi(v) dx.$$

et

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} dx - d_2 \int_{\Omega} \Delta v dx = -\sigma \int_{\Omega} v dx + \lambda \int_{\Omega} u \varphi(v) dx.$$

Utilisant la formule de Green et après la simplification, on trouve

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dx = \Lambda |\Omega| - \mu \int_{\Omega} u dx - \lambda \int_{\Omega} u \varphi(v) dx.$$

et

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v dx = -\sigma \int_{\Omega} v dx + \lambda \int_{\Omega} u \varphi(v) dx.$$

3.2 Existence globale

En faisant la somme des deux résultats précédents, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u(t, x) + v(t, x)) dx = |\Omega| \Lambda - \int_{\Omega} (\mu u(t, x) + \sigma v(t, x)) dx.$$

Comme $\sigma_0 = \min\{\mu, \sigma\}$ alors,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u(t, x) + v(t, x)) dx \leq |\Omega| \Lambda - \sigma_0 \int_{\Omega} (u(t, x) + v(t, x)) dx. \quad (3.5)$$

Maintenant, en intégrant (3.5) sur $[0, t]$ on trouve

$$\int_{\Omega} (u(t, x) + v(t, x)) dx \leq \int_{\Omega} (u_0(x) + v_0(x)) dx + \int_0^t \left(|\Omega| \Lambda - \sigma_0 \int_{\Omega} (u(s, x) + v(s, x)) dx \right) ds.$$

On appliquons le lemme de Gronwall ^{1.2} sur cette dernière inégalité, on aboutit à

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u(t, x) + v(t, x)) dx &\leq e^{-\sigma_0 t} \int_{\Omega} (u_0(x) + v_0(x)) dx + |\Omega| \Lambda \int_0^t e^{-\sigma_0(t-s)} ds \\ &\leq e^{-\sigma_0 t} \int_{\Omega} (u_0(x) + v_0(x)) dx + |\Omega| \frac{\Lambda}{\sigma_0} (1 - e^{-\sigma_0 t}). \end{aligned}$$

D'où, pour tout $t \in (0, T_{max})$

$$\int_{\Omega} (u(t, x) + v(t, x)) dx \leq N_2, \quad (3.6)$$

où $N_2 = e^{-\sigma_0 t} \int_{\Omega} (u_0(x) + v_0(x)) dx + |\Omega| \frac{\Lambda}{\sigma_0} (1 - e^{-\sigma_0 t}) > 0$.

Ainsi, pour tout $t \in (0, T_{max})$

$$\int_{\Omega} v(t, x) dx \leq N_2. \quad (3.7)$$

En suivant les traces de [[42], Théorème 3.1] et en utilisant le v -équation, nous concluons $\exists N_3 > 0$ cela dépend de N_2 tel que $v(t, x) \leq N_3$ sur $[0, T_{max}) \times \overline{\Omega}$.

Donc v est également uniformément bornée dans $[0, T_{max}) \times \overline{\Omega}$. En utilisant la théorie standard des systèmes paraboliques semi-linéaires décrite dans [43], on en déduit $T_{max} = \infty$.

Lorsque $T_{max} = \infty$, le système (3.4) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = \Lambda - \mu u - \lambda u \varphi(v) \leq \Lambda - \mu u & (0, \infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \leq \|u_0\|_{C(\overline{\Omega})} & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } (0, \infty) \times \partial \Omega. \end{cases} \quad (3.8)$$

3.2 Existence globale

Maintenant, on va montrer par le principe du maximum que $u(t, x) \leq \omega(t)$, $\forall (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega$.

où $\omega(t) = \|u_0\|_{C(\bar{\Omega})} e^{-\mu t} + \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)(1 - e^{-\mu t})$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \Lambda - \mu\omega, & t > 0, \\ \omega(0) = \|u_0\|_{C(\bar{\Omega})}. \end{cases} \quad (3.9)$$

On multiplie la 1 ère équation de (3.8) par $(u - \omega)^+$ et on intègre sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} (u - \omega)^+ dx - d_1 \int_{\Omega} \Delta u (u - \omega)^+ dx &= \Lambda \int_{\Omega} (u - \omega)^+ dx - \mu \int_{\Omega} u (u - \omega)^+ dx \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} u \varphi(v) (u - \omega)^+ dx \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u - \omega)^{+2} dx + d_1 \int_{\Omega} |\nabla (u - \omega)^+|^2 dx &\leq \Lambda \int_{\Omega} (u - \omega)^+ dx - \mu \int_{\Omega} u (u - \omega)^+ dx. \end{aligned}$$

Après la simplification, il vient que

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u(t, x) - \omega(t))^{+2} dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_0(x) - \omega(0))^{+2} dx.$$

Comme $\omega(0) = \|u_0\|_{C(\bar{\Omega})} \geq u_0$ alors $u_0 - \omega(0) \leq 0$,

ensuite $(u_0 - \omega(0))^+ \equiv 0$.

D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u(t, x) - \omega(t))^{+2} dx &= 0, \\ (u(t, x) - \omega(t))^+ &\equiv 0 \quad p.p. \end{aligned}$$

Or $u \in C(\bar{\Omega})$, donc $(u(t, x) - \omega(t))^+ = 0$.

D'où $u(t, x) \leq \omega(t)$ pour $t \in [0, \infty)$.

En conséquence, pour $x \in \bar{\Omega}$ on a

$$u(t, x) \leq \omega(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Nous avons donc une borne supérieure pour $\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}$ indépendante des conditions initiales étant donné un t suffisamment grand. En appliquant [[44], Lemme 3.1] on trouve que $\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}$ est aussi bornée par une constante positive indépendante des conditions initiales pour un assez grand t .

3.3 La stabilité de l'EDP

3.3.1 Stabilité locale

Nous avons déjà établi des conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique locale du système (2.1)–(2.2) dans le scénario ODE. Examinons maintenant le cas plus général (1)–(3) d'EDP.

Théorème 3.1. *Pour le système (1)–(3) :*

- (i) Si $R_0 < 1$ l'équilibre sans maladie $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ est localement asymptotiquement stable.
- (ii) Si $R_0 > 1$ l'équilibre stable endémique constant positif $E^* = (u^*, v^*)$ est localement asymptotiquement stable.

Preuve.

- (i) En présence de diffusion, le point d'équilibre $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ satisfait

$$\begin{cases} d_1 \Delta u + \Lambda - \lambda u^* \varphi(v^*) - \mu u^* = 0, \\ d_2 \Delta v + \lambda u^* \varphi(v^*) - \sigma v^* = 0, \end{cases}$$

aux frontières de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega.$$

On note la suite indéfinie de valeurs propres positives pour l'opérateur Laplacien $(-\Delta)$ dans Ω avec conditions aux limites de Neumann par $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \nearrow +\infty$. Notez que la première fonction propre est une constante, c'est pourquoi la valeur propre correspondante est égale à zéro. La séquence correspondante de fonctions propres est notée par $(\Phi_{ij})_{j=1, m_i}$, où $m_i \geq 1$ est la multiplicité algébrique de λ_i . Ces fonctions sont les solutions de

$$\begin{cases} -\Delta \Phi_{ij} = \lambda_i \Phi_{ij} & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les fonctions propres sont normalisées selon

$$\|\Phi_{ij}\|_2 = \int_{\Omega} \Phi_{ij}^2(x) dx = 1.$$

3.3 La stabilité de l'EDP

L'ensemble des fonctions propres $\{\Phi_{ij} : i \geq 0, j = \overline{1, m_i}\}$ forme une base orthonormée complète dans $L^2(\Omega)$. En ordre pour établir la stabilité asymptotique locale des états stationnaires, il faut examiner toutes les valeurs propres de l'opérateur linéarisant et si elles ont toutes des parties réelles négatives, alors la solution est localement asymptotiquement stable. L'opérateur de linéarisation peut être donné par

$$\mathcal{L}(E_0) = \begin{pmatrix} d_1 \Delta - \mu & -\lambda \frac{\Lambda}{\mu} \varphi'(0) \\ 0 & d_2 \Delta + \lambda \frac{\Lambda}{\mu} \varphi'(0) - \sigma \end{pmatrix}.$$

En utilisant la même méthode de [1], la stabilité de E_0 revient à examiner les valeurs propres des matrices

$$J_i(E_0) = \begin{pmatrix} -d_1 \lambda_i - \mu & -\lambda \frac{\Lambda}{\mu} \varphi'(0) \\ 0 & -d_2 \lambda_i + \lambda \frac{\Lambda}{\mu} \varphi'(0) - \sigma \end{pmatrix} \text{ pour tout } i \geq 0.$$

Pour cela, on calcule le polynôme caractéristique de $J_i(E_0)$.

$$\begin{aligned} \det(J_i(E_0) - r_i I_2) &= \begin{vmatrix} -d_1 \lambda_i - \mu - r_i & -\lambda \frac{\Lambda}{\mu} \varphi'(0) \\ 0 & -d_2 \lambda_i + \lambda \frac{\Lambda}{\mu} \varphi'(0) - \sigma - r_i \end{vmatrix} \\ &= (r_i + d_1 \lambda_i + \mu)(r_i + d_2 \lambda_i - \lambda \frac{\Lambda}{\mu} \varphi'(0) + \sigma). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \det(J_i(E_0) - r_i I_2) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} r_{i1} = -d_1 \lambda_i - \mu \\ r_{i2} = -d_2 \lambda_i + \lambda \frac{\Lambda}{\mu} \varphi'(0) - \sigma \end{cases} \text{ pour tout } i \geq 0, \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r_{i1} = -d_1 \lambda_i + r_1 \\ r_{i2} = -d_2 \lambda_i + r_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Depuis r_1 et r_2 sont négatives pour $R_0 < 1$ et puisque les valeurs propres de Laplacien sont positives et en ordre croissant, r_{i1} et r_{i2} ont clairement des parties réelles négatives pour $R_0 < 1$ conduisant à la stabilité locale de $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$.

(ii) Le deuxième état stationnaire $E^* = (u^*, v^*)$ satisfait

$$\begin{cases} d_1 \Delta u + \Lambda - \lambda u^* \varphi(v^*) - \mu u^* = 0 \\ d_2 \Delta v + \lambda u^* \varphi(v^*) - \sigma v^* = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

3.3 La stabilité de l'EDP

L'opérateur de linéarisation correspondant est

$$\mathcal{L}(E^*) = \begin{pmatrix} d_1 \Delta - \lambda \varphi(v^*) - \mu & -\lambda u^* \varphi'(v^*) \\ \lambda \varphi(v^*) & d_2 \Delta + \lambda u^* \varphi'(v^*) - \sigma \end{pmatrix}.$$

D'où la stabilité de E^* repose sur la négativité des parties réelles des valeurs propres des matrices

$$J_i(E^*) = \begin{pmatrix} -d_1 \lambda_i - \lambda \varphi(v^*) - \mu & -\lambda u^* \varphi'(v^*) \\ \lambda \varphi(v^*) & -d_2 \lambda_i + \lambda u^* \varphi'(v^*) - \sigma \end{pmatrix}, \text{ pour tout } i \geq 0,$$

qui est garanti si la trace et le déterminant de $J_i(E^*)$ remplit les conditions $tr(J_i(E^*)) < 0$ et $\det(J_i(E^*)) > 0$ pour tout $i \geq 0$. La trace de $J_i(E^*)$ est donnée par

$$\begin{aligned} tr(J_i(E^*)) &= -d_1 \lambda_i - d_2 \lambda_i - \lambda \varphi(v^*) - \mu + \lambda u^* \varphi'(v^*) - \sigma, \\ &= -\lambda_i (d_1 + d_2) + tr(J(u^*, v^*)). \end{aligned}$$

Depuis $tr(J(u^*, v^*)) < 0$, il s'ensuit que $tr(J_i(E^*)) < 0$ pour tout $i \geq 0$. Le déterminant est donné par

$$\begin{aligned} \det(J_i(E^*)) &= (-d_1 \lambda_i - \lambda \varphi(v^*) - \mu)(-d_2 \lambda_i + \lambda u^* \varphi'(v^*) - \sigma) - \lambda \varphi(v^*)(-\lambda u^* \varphi'(v^*)) \\ &= d_1 d_2 \lambda_i^2 - d_1 \lambda_i \lambda u^* \varphi'(v^*) + \sigma d_1 \lambda_i + d_2 \lambda_i \lambda \varphi(v^*) - \lambda^2 u^* \varphi(v^*) \varphi'(v^*) \\ &\quad + \sigma \lambda \varphi(v^*) + \mu d_2 \lambda_i - \mu \lambda u^* \varphi'(v^*) + \mu \sigma + \lambda^2 u^* \varphi(v^*) \varphi'(v^*), \\ &= d_1 d_2 \lambda_i^2 + \lambda_i [-d_1 \lambda u^* \varphi'(v^*) + d_1 \sigma + d_2 \lambda \varphi(v^*) + \mu d_2] + \lambda \sigma \varphi(v^*) \\ &\quad + \mu \sigma - \mu \lambda u^* \varphi'(v^*). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\det(J_i(E^*)) = d_1 d_2 \lambda_i^2 + \lambda_i H_0 + \det(J(u^*, v^*)) \quad \text{pour tout } i \geq 0,$$

où

$$H_0 = -d_1 \lambda u^* \varphi'(v^*) + d_1 \sigma + \lambda \varphi(v^*) d_2 + \mu d_2.$$

En utilisant (5) et (2.6), on considère que

$$\begin{aligned} H_0 &\geq -d_1 \lambda u^* \frac{\varphi(v^*)}{v^*} + d_1 \frac{\lambda u^* \varphi(v^*)}{v^*} + \lambda \varphi(v^*) d_2 + \mu d_2, \\ &= -d_1 \sigma + d_1 \sigma + \lambda \varphi(v^*) d_2 + \mu d_2, \\ &= d_2 (\lambda \varphi(v^*) + \mu), \\ &= d_2 \frac{\Lambda}{u^*} > 0 \end{aligned}$$

3.3 La stabilité de l'EDP

qui conduit à

$$\det(J_i(E^*)) = d_1 d_2 \lambda_i^2 + \lambda_i H_0 + \det(J(u^*, v^*)) > 0, \quad \text{pour tout } i \geq 0.$$

D'où, E^* est localement asymptotiquement stable. □

3.3.2 Stabilité asymptotique globale

Ensuite, nous étudions la stabilité asymptotique globale des deux états stationnaires E_0 et E^* . La stabilité globale dépend du nombre de reproduction R_0 , c'est pourquoi nous avons décidé de traiter les scénarios $R_0 < 1$ et $R_0 > 1$ séparément. Mais d'abord, énonçons un lemme nécessaire tiré de [31] qui aidera les preuves à venir.

Lemme 3.2. *Étant donné que φ satisfait au critère (5) et*

$$L(x) = x - 1 - \ln(x), \quad \text{pour tout } x > 0, \tag{3.10}$$

l'inégalité

$$L\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}\right) \leq L\left(\frac{v}{v^*}\right), \tag{3.11}$$

où v^ est la deuxième composante du point d'équilibre E^* .*

Preuve. On peut séparer la preuve en deux cas :

1. Le premier cas est $v \geq v^*$.

Posons $\psi(v) = \frac{\varphi(v)}{v}$, pour tout $v > 0$.

On peut montrer que la fonction ψ est décroissante pour tout $v > 0$, comme :

$$\frac{d\psi(v)}{dv} = \frac{v\varphi'(v) - \varphi(v)}{v^2}.$$

La condition (5) donne

$$\frac{d\psi(v)}{dv} \leq 0.$$

Grâce à la décroissance de la fonction ψ , on obtient

$$\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)} \leq \frac{v}{v^*}.$$

Notez que (5) implique que φ est croissante, ce qui conduit à

$$\varphi(v) \geq \varphi(v^*)$$

3.3 La stabilité de l'EDP

et par conséquent,

$$1 \leq \frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)} \leq \frac{v}{v^*}.$$

Maintenant, on étudie la monotonie de la fonction L comme :

$$L'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, \quad x > 0$$

$L'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1 \Rightarrow L$ est décroissante.

$L'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow L$ est croissante.

Comme L est croissante pour tout $x > 1$ alors on aura : (3.11) pour tout $v \geq v^*$.

2. Le deuxième cas est $0 < v < v^*$.

Encore une fois, puisque ψ est une fonction décroissante on a

$$\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)} > \frac{v}{v^*}$$

et étant donné la nature croissante de φ , on se retrouve avec

$$\varphi(v) < \varphi(v^*).$$

En conséquence, nous obtenons

$$1 > \frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)} > \frac{v}{v^*} > 0.$$

Depuis L est décroissante pour $0 < x \leq 1$, on aura (3.11).

□

3.3.2.1 Stabilité asymptotique globale pour $R_0 < 1$

Établir la stabilité asymptotique globale de l'équilibre sans maladie E_0 , nous considérons

$$V_\theta(t) = \int_\Omega \left[uv + \frac{\theta}{2} \left(u - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{\Lambda}{\sigma}v \right] dx, \quad \text{où } \theta > 0,$$

comme fonction de notre candidat Lyapunov. Le but de cette sous-section est d'obtenir une condition plus faible que celle de [10].

Théorème 3.2. *Si $R_0 < 1$ alors E_0 est un état d'équilibre sans maladie globalement asymptotiquement stable pour le système (1)-(3) sous l'hypothèse*

$$\varphi'(0) \leq \frac{\mu + \sigma}{\lambda \left(\theta \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\Lambda}{\sigma} \right)}, \quad (3.12)$$

3.3 La stabilité de l'EDP

avec

$$\theta \geq \frac{(d_1 + d_2)^2}{4d_1d_2}. \quad (3.13)$$

Preuve. Pour prouver que $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ est globalement asymptotiquement stable, il faut montrer que $V_\theta(t)$ est une fonction de Lyapunov. La définition positive de $V_\theta(t)$ est évidente. L'évaluation de sa dérivée par rapport au temps donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_\theta(t) &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}v + u \frac{\partial v}{\partial t} \right) dx + \theta \int_{\Omega} \left(u - \frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{\Omega} v \frac{\partial v}{\partial t} dx + \frac{\Lambda}{\sigma} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} dx, \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}v + u \frac{\partial v}{\partial t} \right) dx, \\ I_2 &= \theta \int_{\Omega} \left(u - \frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx \end{aligned}$$

et

$$I_3 = \int_{\Omega} v \frac{\partial v}{\partial t} dx + \frac{\Lambda}{\sigma} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} dx.$$

D'après (1) on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \Lambda - \mu u - \lambda u \varphi(v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v - \sigma v + \lambda u \varphi(v). \end{cases} \quad (3.14)$$

Substituant les valeurs des dérivées partielles de (3.14) dans I_1, I_2 et I_3

$$\begin{aligned} I_1 &= d_1 \int_{\Omega} \Delta u v dx + \Lambda \int_{\Omega} v dx - \mu \int_{\Omega} u v dx - \lambda \int_{\Omega} u v \varphi(v) dx \\ &\quad + d_2 \int_{\Omega} \Delta v u dx - \sigma \int_{\Omega} u v dx + \lambda \int_{\Omega} u^2 \varphi(v) dx. \\ &= d_1 \int_{\Omega} \Delta u v dx + d_2 \int_{\Omega} \Delta v u dx + \Lambda \int_{\Omega} v dx - \lambda \int_{\Omega} u v \varphi(v) dx \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} u^2 \varphi(v) dx - (\sigma + \mu) \int_{\Omega} u v dx. \\ I_2 &= d_1 \theta \int_{\Omega} \Delta u u dx + \Lambda \theta \int_{\Omega} u dx - \mu \theta \int_{\Omega} u^2 dx - \lambda \theta \int_{\Omega} u^2 \varphi(v) dx \\ &\quad - \theta \frac{\Lambda}{\mu} d_1 \int_{\Omega} \Delta u dx - \theta \frac{\Lambda^2}{\mu} \int_{\Omega} dx + \Lambda \theta \int_{\Omega} u dx + \lambda \theta \frac{\Lambda}{\mu} \int_{\Omega} u \varphi(v) dx. \\ &= d_1 \theta \int_{\Omega} \Delta u u dx - \theta \frac{\Lambda}{\mu} d_1 \int_{\Omega} \Delta u dx - \mu \theta \int_{\Omega} \left[u^2 + \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - 2u \frac{\Lambda}{\mu} \right] dx \\ &\quad - \lambda \theta \int_{\Omega} u^2 \varphi(v) dx + \lambda \theta \frac{\Lambda}{\mu} \int_{\Omega} u \varphi(v) dx. \end{aligned}$$

3.3 La stabilité de l'EDP

et

$$I_3 = d_2 \int_{\Omega} \Delta v v dx - \sigma \int_{\Omega} v^2 dx + \lambda \int_{\Omega} uv \varphi(v) dx + \frac{\Lambda}{\sigma} d_2 \int_{\Omega} \Delta v dx \\ - \Lambda \int_{\Omega} v dx + \lambda \frac{\Lambda}{\sigma} \int_{\Omega} u \varphi(v) dx.$$

En utilisant la formule de Green avec des conditions aux limites de Neumann homogènes supposées, on est conduit à

$$I_1 = -(d_1 + d_2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \Lambda \int_{\Omega} v dx - \lambda \int_{\Omega} uv \varphi(v) dx + \lambda \int_{\Omega} u^2 \varphi(v) dx \\ - (\sigma + \mu) \int_{\Omega} uv dx,$$

$$I_2 = -d_1 \theta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \mu \theta \int_{\Omega} \left(u - \frac{\Lambda}{\mu}\right)^2 dx - \lambda \theta \int_{\Omega} u^2 \varphi(v) dx + \lambda \theta \frac{\Lambda}{\mu} \int_{\Omega} u \varphi(v) dx.$$

et

$$I_3 = -d_2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} uv \varphi(v) dx - \sigma \int_{\Omega} v^2 dx + \lambda \frac{\Lambda}{\sigma} \int_{\Omega} u \varphi(v) dx - \Lambda \int_{\Omega} v dx.$$

La somme des termes I_1, I_2 et I_3 donne

$$\frac{d}{dt} V_{\theta}(t) = -d_1 \theta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (d_1 + d_2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - d_2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ + \lambda(1 - \theta) \int_{\Omega} u^2 \varphi(v) dx - (\sigma + \mu) \int_{\Omega} uv dx - \mu \theta \int_{\Omega} \left(u - \frac{\Lambda}{\mu}\right)^2 dx \\ - \sigma \int_{\Omega} v^2 dx + \lambda \left(\theta \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\Lambda}{\sigma}\right) \int_{\Omega} u \varphi(v) dx. \\ = I + J,$$

où

$$I = -d_1 \theta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (d_1 + d_2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - d_2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

et

$$J = \lambda(1 - \theta) \int_{\Omega} u^2 \varphi(v) dx + \lambda \left(\theta \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\Lambda}{\sigma}\right) \int_{\Omega} u \varphi(v) dx \\ - (\sigma + \mu) \int_{\Omega} uv dx - \mu \theta \int_{\Omega} \left(u - \frac{\Lambda}{\mu}\right)^2 dx - \sigma \int_{\Omega} v^2 dx.$$

3.3 La stabilité de l'EDP

Le premier terme peut s'écrire

$$I = - \int_{\Omega} Q(\nabla u, \nabla v) dx,$$

où Q est une forme quadratique par rapport à ∇u et ∇v , c'est à dire

$$Q(\nabla u, \nabla v) = d_1 \theta |\nabla u|^2 + (d_1 + d_2) \nabla u \nabla v + d_2 |\nabla v|^2.$$

On calcule Δ^* le discriminant de $Q(\nabla u, \nabla v)$

$$\begin{aligned} \Delta^* &= (d_1 + d_2)^2 |\nabla v|^2 - 4d_1 \theta d_2 |\nabla v|^2, \\ &= |\nabla v|^2 \left((d_1 + d_2)^2 - 4d_1 d_2 \theta \right). \end{aligned}$$

D'après (3.13) on a

$$(d_1 + d_2)^2 - 4d_1 d_2 \theta \leq 0 \quad \text{avec } (d_1 \theta > 0).$$

Donc $\Delta^* \leq 0$.

D'où $Q(\nabla u, \nabla v)$ est positive et $I \leq 0$.

D'autre part, en utilisant l'inégalité $\theta \geq \frac{(d_1 + d_2)^2}{4d_1 d_2} \geq 1$ on a

$$J \leq \lambda \left(\theta \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\Lambda}{\sigma} \right) \int_{\Omega} u \varphi(v) dx - (\sigma + \mu) \int_{\Omega} uv dx - \mu \theta \int_{\Omega} \left(u - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 dx - \sigma \int_{\Omega} v^2 dx.$$

L'application du lemme 3.1 donne

$$J \leq \int_{\Omega} \left[\lambda \left(\theta \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\Lambda}{\sigma} \right) \varphi'(0) - (\mu + \sigma) \right] uv dx - \mu \theta \int_{\Omega} \left(u - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 dx - \sigma \int_{\Omega} v^2 dx. \quad (3.15)$$

D'après (3.12) on a

$$\lambda \left(\theta \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\Lambda}{\sigma} \right) \varphi'(0) \leq \mu + \sigma.$$

Alors,

$$\lambda \left(\theta \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\Lambda}{\sigma} \right) \varphi'(0) - (\mu + \sigma) \leq 0.$$

D'où $J \leq 0$.

Par suite, $\frac{d}{dt} V_{\theta}(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$ avec $V_{\theta}(t) = 0$ être vrai quand $(u, v) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right)$.

Enfin, par la méthode directe de Lyapunov, E_0 est globalement asymptotiquement stable. □

3.3 La stabilité de l'EDP

3.3.2.2 Stabilité asymptotique globale pour $R_0 > 1$

Théorème 3.3. *Si $R_0 > 1$ alors E^* est un état stationnaire endémique globalement asymptotiquement stable pour le système (1)-(3).*

Preuve. Pour cette preuve, nous considérons la fonction candidate de Lyapunov

$$V(t) = \int_{\Omega} \left[u^* L\left(\frac{u}{u^*}\right) + v^* L\left(\frac{v}{v^*}\right) \right] dx, \quad (3.16)$$

qui est une fonction définie positive et continûment dérivable. Tout d'abord, notez que

$$\frac{d}{dt} L\left(\frac{u}{u^*}\right) = \frac{1}{u^*} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) \frac{\partial u}{\partial t}.$$

La dérivée de V par rapport à t donne comme suit

$$\frac{d}{dt} V(t) = \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) \frac{\partial v}{\partial t} dx.$$

La substitution de (3.14) dans cette dernière formule, fournit

$$\frac{d}{dt} V(t) = \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) (d_1 \Delta u + \Lambda - \lambda u \varphi(v) - \mu u) dx + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) (d_2 \Delta v + \lambda u \varphi(v) - \sigma v) dx.$$

Similaire au scénario précédent, nous appliquons la formule de Green aux bornes de Neumann supposées pour étendre la dérivée à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) &= -d_1 \int_{\Omega} \nabla \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) \nabla u dx + \Lambda \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) dx - \lambda \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) u \varphi(v) dx \\ &\quad - \mu \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) u dx - d_2 \int_{\Omega} \nabla \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) u \varphi(v) dx \\ &\quad - \sigma \int_{\Omega} \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) v dx \\ &= I + J, \end{aligned}$$

où

$$I = d_1 \int_{\Omega} u^* \nabla \left(\frac{1}{u}\right) \nabla u dx + d_2 \int_{\Omega} v^* \left(\frac{1}{v}\right) \nabla v dx.$$

$$\text{Or, } \begin{cases} \nabla \left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\nabla u}{u^2} \\ \nabla \left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{\nabla v}{v^2}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= -d_1 \int_{\Omega} \frac{u^*}{u^2} |\nabla u|^2 dx - d_2 \int_{\Omega} \frac{v^*}{v^2} |\nabla v|^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} \left[d_1 \frac{u^*}{u^2} |\nabla u|^2 + d_2 \frac{v^*}{v^2} |\nabla v|^2 \right] dx \leq 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3 La stabilité de l'EDP

et

$$J = \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) [\Lambda - \lambda u \varphi(v) - \mu u] dx + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) [\lambda u \varphi(v) - \sigma v] dx. \quad (3.18)$$

En utilisant (2.6), on trouve

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) [\lambda u^* \varphi(v^*) + \mu u^* - \lambda u \varphi(v) - \mu u] dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) \left[\lambda u \varphi(v) - \frac{\lambda u^* \varphi(v^*)}{v^*} v \right] dx, \\ &= \int_{\Omega} (\mu u^* - \mu u) \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) dx + \int_{\Omega} \left(\lambda u \varphi(v) - \frac{\lambda u^* v^* \varphi(v^*)}{v^*} \right) \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (\lambda u^* \varphi(v^*) - \lambda u \varphi(v)) \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) dx. \end{aligned}$$

La simplification de l'équation résultante conduit à

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Omega} \mu u^* \left(1 - \frac{u}{u^*}\right) \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) dx + \lambda u^* \varphi(v^*) \int_{\Omega} \left(\frac{u \varphi(v)}{u^* \varphi(v^*)} - \frac{v}{v^*} \right) \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) dx \\ &\quad + \lambda u^* \varphi(v^*) \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u \varphi(v)}{u^* \varphi(v^*)}\right) \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) dx \\ &= \int_{\Omega} [\mu u^* J_1 + \lambda u^* \varphi(v^*) J_2] dx, \end{aligned} \quad (3.19)$$

où

$$J_1 = \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) \left(1 - \frac{u}{u^*}\right)$$

et

$$\begin{aligned} J_2 &= \left(\frac{u \varphi(v)}{u^* \varphi(v^*)} - \frac{v}{v^*} \right) \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) + \left(1 - \frac{u \varphi(v)}{u^* \varphi(v^*)}\right) \left(1 - \frac{u^*}{u}\right), \\ &= \frac{u \varphi(v)}{u^* \varphi(v^*)} - \frac{u \varphi(v) v^*}{u^* \varphi(v^*) v} - \frac{v}{v^*} + 2 - \frac{u^*}{u} - \frac{u \varphi(v)}{u^* \varphi(v^*)} + \frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}, \\ &= \frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)} - \frac{v}{v^*} - \frac{u \varphi(v) v^*}{u^* \varphi(v^*) v} - \frac{u^*}{u} + 2. \end{aligned}$$

On peut réécrire J_1 et J_2 comme suit :

$$\begin{aligned} J_1 &= \left(1 - \frac{u}{u^*} - \frac{u^*}{u} + 1\right) \\ &= -\left(\frac{u}{u^*} - 1 + \frac{u^*}{u} - 1\right) \\ &= -\left(\frac{u}{u^*} - 1 - \ln\left(\frac{u}{u^*}\right) + \ln\left(\frac{u}{u^*}\right) + \frac{u^*}{u} - 1\right) \\ &= -\left(\frac{u}{u^*} - 1 - \ln\left(\frac{u}{u^*}\right)\right) - \left(\frac{u^*}{u} - 1 - \ln\left(\frac{u^*}{u}\right)\right). \end{aligned}$$

3.3 La stabilité de l'EDP

D'où

$$J_1 = -L\left(\frac{u}{u^*}\right) - L\left(\frac{u^*}{u}\right). \quad (3.20)$$

et

$$\begin{aligned} J_2 &= \left[\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)} - 1 - \ln\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}\right) \right] + \ln\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}\right) - \left[\frac{v}{v^*} - 1 - \ln\left(\frac{v}{v^*}\right) \right] - \ln\left(\frac{v}{v^*}\right) \\ &\quad - \left[\frac{u\varphi(v)v^*}{u^*\varphi(v^*)v} - 1 - \ln\left(\frac{u\varphi(v)v^*}{u^*\varphi(v^*)v}\right) \right] - \ln\left(\frac{u\varphi(v)v^*}{u^*\varphi(v^*)v}\right) - \left[\frac{u^*}{u} - 1 - \ln\left(\frac{u^*}{u}\right) \right] - \ln\left(\frac{u^*}{u}\right), \\ &= L\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}\right) - L\left(\frac{v}{v^*}\right) - L\left(\frac{u\varphi(v)v^*}{u^*\varphi(v^*)v}\right) - L\left(\frac{u^*}{u}\right) + \ln\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}\right) - \ln\left(\frac{v}{v^*}\right) - \ln\left(\frac{u\varphi(v)v^*}{u^*\varphi(v^*)v}\right) \\ &\quad - \ln\left(\frac{u^*}{u}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}\right) - \ln\left(\frac{v}{v^*}\right) - \ln\left(\frac{u^*}{u}\right) - \ln\left(\frac{u\varphi(v)v^*}{u^*\varphi(v^*)v}\right) &= \ln\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)} \cdot \frac{v^*}{v} \cdot \frac{u}{u^*}\right) - \ln\left(\frac{u\varphi(v)v^*}{u^*\varphi(v^*)v}\right) \\ &= \ln\left(\frac{u\varphi(v)v^*}{u^*\varphi(v^*)v}\right) - \ln\left(\frac{u\varphi(v)v^*}{u^*\varphi(v^*)v}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$J_2 = -L\left(\frac{u^*}{u}\right) + L\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}\right) - L\left(\frac{v}{v^*}\right) - L\left(\frac{u\varphi(v)v^*}{u^*\varphi(v^*)v}\right), \quad (3.21)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} J &= -\mu u^* \int_{\Omega} \left[L\left(\frac{u}{u^*}\right) + L\left(\frac{u^*}{u}\right) \right] dx - \lambda u^* \varphi(v^*) \int_{\Omega} \left[L\left(\frac{u^*}{u}\right) + L\left(\frac{u\varphi(v)v^*}{u^*\varphi(v^*)v}\right) \right] dx \\ &\quad + \lambda u^* \varphi(v^*) \int_{\Omega} \left[L\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}\right) - L\left(\frac{v}{v^*}\right) \right] dx. \end{aligned}$$

Profitant de la positivité établie de L et en appliquant le lemme 3.2, on aboutit à $J \leq 0$.

D'où $\frac{d}{dt}V(t) \leq 0$ et par conséquent, V est décroissante pour tout $t \geq 0$ avec $V(t) = 0$ seulement à l'état d'équilibre $E^* = (u^*, v^*)$.

Enfin, La stabilité asymptotique globale de E^* découle de la méthode directe de Lyapunov. \square

3.3.3 Remarque importante (Stabilité globale pour l'EDO)

Il est important de noter que pour le système (1)-(2) dans le cas ODE, nous avons les résultats suivants :

3.3 La stabilité de l'EDP

- (i) Pour $R_0 < 1$ l'équilibre sans maladie E_0 est globalement asymptotiquement stable.
Ce facile à établir comme $d_1 = d_2 = 0$ et il suffit donc de choisir $\theta = 1$ dans $V_\theta(t)$.
- (ii) Pour $R_0 > 1$ et pourvu que la condition (5) soit satisfaite, l'équilibre endémique $E^* = (u^*, v^*)$ est globalement asymptotiquement stable.

Chapitre 4

Applications et exemples numériques

Bien que les méthodes analytiques que nous avons utilisé pour obtenir les principaux résultats de cette étude soient théoriquement solides, il est toujours avantageux d'utiliser des solutions numériques pour illustrer et confirmer leur validité.

Nous considérons une fonction d'incidence de la forme $u\varphi(v)$ satisfaisant à (5) et nous évaluerons la stabilité asymptotique locale et globale de l'équilibre sans maladie E_0 lorsque $R_0 < 1$ et l'équilibre endémique E^* lorsque $R_0 > 1$.

L'accent sera mis sur les principaux résultats du mémoire tels que rapportés dans les théorèmes 3.2 (condition (3.12)) et 3.3.

Dans ce qui suit, nous examinons trois exemples numériques différents.

4.1 Premier exemple

Dans ce premier exemple, on considère la fonction

$$\varphi(v) = \alpha v, \text{ pour tout } \alpha > 0.$$

Le problème résultant est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = -\lambda \alpha u v + \Lambda - \mu u & \text{sur } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = \lambda \alpha u v - \sigma v & \text{sur } (0, \infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x) & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } (0, \infty) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

4.1 Premier exemple

qui est un cas particulier du système (1)–(3).

En fait, le système (4.1) est identique au système oiseau proposé dans la section 3 de [17] et dans [9] mais avec $d_1 = d_2$. Le scénario EDO de ce modèle a été traité plus tôt dans [18] et [38] respectivement.

Les conditions (4) et (5) sont clairement satisfaites car

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(v) = \alpha > 0, \\ \varphi'(0) = \alpha, \\ \alpha v = v\varphi'(v) \leq \varphi(v) = \alpha v. \end{cases}$$

Le système (4.1) possède deux états stables constants

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right) \quad \text{et} \quad E^* = \left(\frac{\sigma}{\lambda\alpha}, \frac{\mu}{\alpha\lambda}(R_0 - 1) \right).$$

Notez que le deuxième état stationnaire E^* n'existe que lorsque le nombre de reproduction $R_0 = \frac{\lambda\Lambda}{\mu\sigma}\varphi'(0) = \frac{\lambda\Lambda}{\mu\sigma}\alpha > 1$ et est globalement asymptotiquement stable. Notez également que le premier état stationnaire E_0 est globalement asymptotiquement stable inconditionnellement dans le cas EDO et sous réserve de

$$\frac{(d_1 + d_2)^2}{4d_1d_2} \leq \theta \leq \frac{\mu}{\Lambda} \left(\frac{\mu + \sigma}{\lambda\alpha} - \frac{\Lambda}{\sigma} \right),$$

lorsque $d_1 \neq d_2$ et à $\theta = 1$ quand $d_1 = d_2$ dans le cas EDP. Comme détaillé dans le Tableau 4.1, nous utilisons différents ensembles de paramètres pour obtenir des solutions numériques dans l'EDO et l'EDP. Notez que tout au long des simulations EDP, nous supposons une seule dimension spatiale avec $\Omega = (0, 10)$.

Voici une description des résultats :

- La figure 4.1 montre les solutions dans le cas EDO soumis aux ensembles 1 et 2, avec $R_0 = 3.7333$ et $R_0 = 0.9524$ respectivement. Dans le premier cas, comme $R_0 > 1$, $E^* = (4.2857, 20.5)$ est globalement asymptotiquement stable. Dans la seconde cas $R_0 < 1$ et $E_0 = (6.8571, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.
- La figure 4.2 illustre la solution dans le cas EDP soumis au jeu de paramètres 1, où $R_0 = 3.7333 > 1$ qui par le théorème 3.3 signifie que $E^* = (4.2857, 20.5)$ est globalement asymptotiquement stable.

4.1 Premier exemple

- La figure 4.3 illustre la solution dans le cas EDP soumis au jeu de paramètres 2, où $R_0 = 0.9524 < 1$. Par le théorème 3.2 et donné $\theta \in \left[\frac{196}{180}, \frac{1805}{1643}\right]$, $E_0 = (6.8571, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

TABLE 4.1 – Paramètres de simulation pour l'exemple 1 : système (4.1).

	Ensemble	Figure	u_0	v_0	d_1	d_2	λ	α	σ	Λ	μ	R_0
Cas EDO	Ensemble 1	4.1(A)	6	$\frac{3}{2}$	-	-	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{7}$	8	$\frac{1}{2}$	3.7333
	Ensemble 2	4.1(B)	6	$\frac{3}{2}$	-	-	2	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{10}$	6	$\frac{7}{8}$	0.9524
Cas EDP	Ensemble 1	4.2	$4 + \frac{\cos(x)}{10}$	$5 + \frac{\sin(x)}{10}$	3	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{7}$	8	$\frac{1}{2}$	3.7333
	Ensemble 2	4.3	$4 + \frac{\cos(x)}{10}$	$5 + \frac{\sin(x)}{10}$	3	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{10}$	6	$\frac{7}{8}$	0.9524

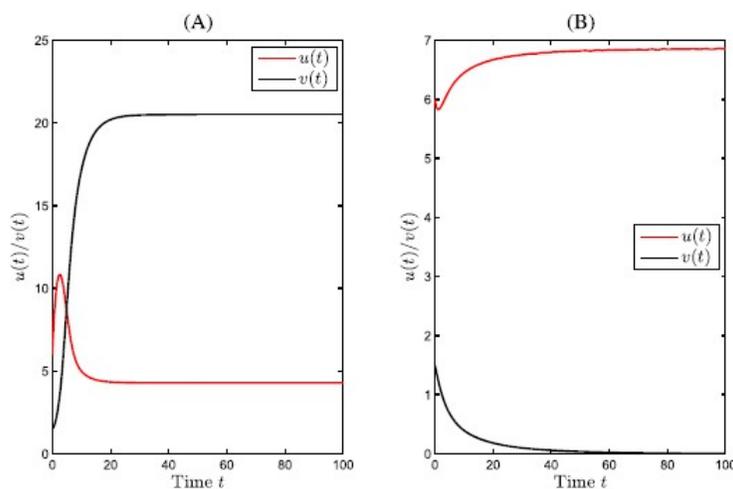


FIGURE 4.1 – Solutions numériques du système (4.1) (cas EDO) soumises aux premier et deuxième ensembles de paramètres.

4.2 Deuxième exemple

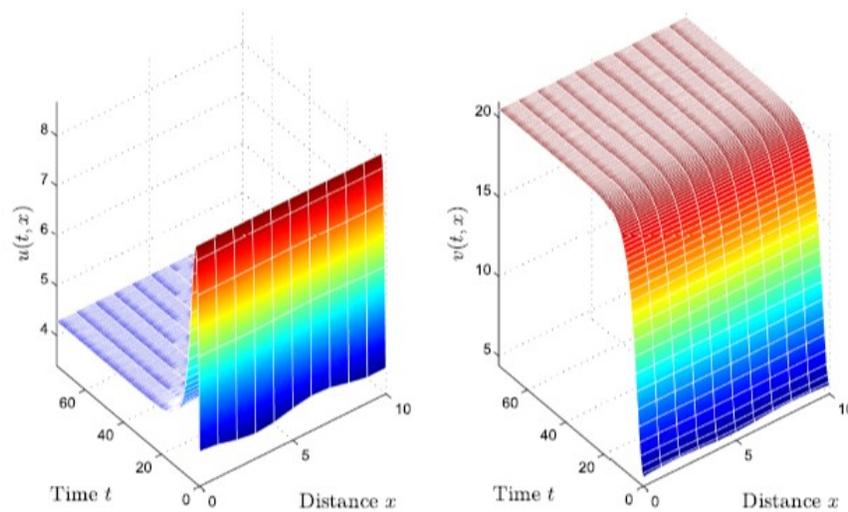


FIGURE 4.2 – Solutions numériques du système (4.1) soumis au premier ensemble de paramètres.

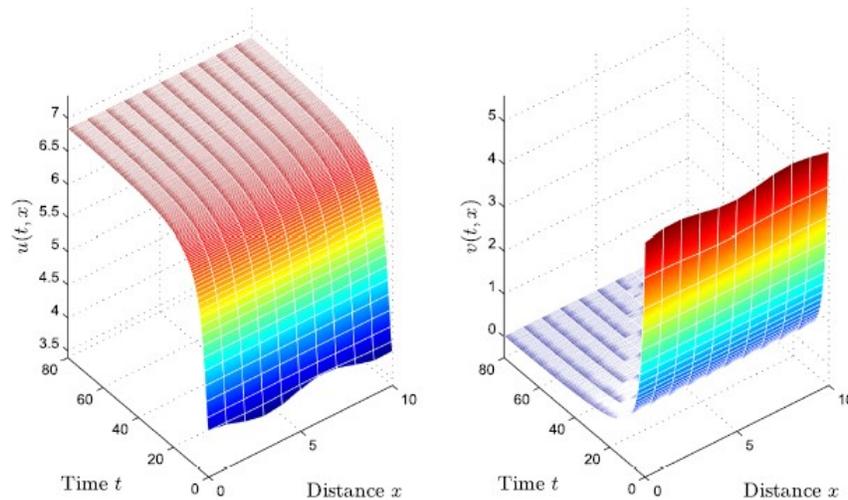


FIGURE 4.3 – Solutions numériques du système (4.1) soumis au deuxième ensemble de paramètres.

4.2 Deuxième exemple

Le deuxième exemple numérique qui nous intéresse est l'extension EDP du modèle EDO SIR étudié dans [23] qui est un cas particulier de (1) avec $\varphi(v) = \frac{\alpha v}{1 + kv}$, $\alpha > 0$ et $k \geq 0$.

4.2 Deuxième exemple

Le système résultant est décrit par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = -\lambda \frac{\alpha uv}{1+kv} + \Lambda - \mu u & \text{sur } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = \lambda \frac{\alpha uv}{1+kv} - \sigma v & \text{sur } (0, \infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x) & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } (0, \infty) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Les conditions posées (4) et (5) peuvent être facilement vérifiées. Il est évident que

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(v) > 0 \quad \text{pour tout } v > 0.$$

Aussi, la dérivée de $\varphi(v)$ est donné par

$$\begin{aligned} \varphi'(v) &= \left(\frac{\alpha v}{1+kv} \right)' \\ &= \frac{\alpha}{(1+kv)^2} > 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = \alpha. \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$v\varphi'(v) = v \frac{\alpha}{(1+kv)^2} \leq \frac{\alpha v}{1+kv} = \varphi(v).$$

Les états stationnaires constants du système (4.2) sont

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right) \quad \text{et} \quad E^* = \left(\frac{\sigma(1+kv^*)}{\lambda\alpha}, \mu \frac{(R_0 - 1)}{(\lambda\alpha + k\mu)} \right).$$

TABLE 4.2 – Paramètres de simulation pour l'exemple 2 : système (4.2).

	Ensemble	Figure	u_0	v_0	d_1	d_2	λ	α	σ	Λ	μ	k	R_0
Cas EDO	Ensemble 1	4.4(A)	3.3	5.6	-	-	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	2.7764
	Ensemble 2	4.4(B)	6.2	8.5	-	-	2	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{5}$	5	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$	0.8750
	Ensemble 3	4.5(A)	2.6	1.4	-	-	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{4}{5}$	3	2.7764
	Ensemble 4	4.5(B)	4.5	4.6	-	-	2	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{5}$	5	$\frac{4}{7}$	7	0.8750
Cas EDP	Ensemble 1	4.6	$9.3 + \frac{\cos(x)}{10}$	$1.6 + \frac{\sin(x)}{10}$	3	2	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	2.7764
	Ensemble 2	4.7	$10.6 + \frac{\cos(x)}{10}$	$1.4 + \frac{\sin(x)}{10}$	3	2	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{4}{5}$	3	2.7764
	Ensemble 3	4.8	$6.2 + \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{10}$	$0.5 + \frac{\sin(x)}{10}$	3	2	2	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{5}$	5	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$	0.8750
	Ensemble 4	4.9	$8.6 + \frac{\cos(x)}{8}$	$4.5 + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{8}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{5}$	5	$\frac{4}{7}$	7	0.8750

4.2 Deuxième exemple

Encore une fois, E^* existe et est globalement asymptotiquement stable à condition que le nombre de reproduction $R_0 = \frac{\lambda\Lambda}{\mu\sigma} \alpha > 1$.

D'autre part, E_0 est globalement asymptotiquement stable dans le cas EDO sans conditions et dans le cas EDP si $\frac{(d_1+d_2)^2}{4d_1d_2} \leq \theta \leq \frac{\mu}{\Lambda} \left(\frac{\mu+\sigma}{\lambda\alpha} - \frac{\Lambda}{\sigma} \right)$ lorsque $d_1 \neq d_2$ et $\theta = 1$ quand $d_1 = d_2$. Le tableau 4.2 montre le paramètre ensembles utilisés dans les simulations numériques.

Voici une description des résultats :

- Les figures 4.4 et 4.5 illustrent les solutions numériques obtenues à l'aide des quatre ensembles de paramètres dans le cas EDO avec des états stationnaires $E^* = (8.2688, 2.4524)$, $E_0 = (8.75, 0)$, $E^* = (9.8534, 0.5509)$ et $E_0 = (8.75, 0)$ respectivement. Dans les quatre scénarios, les méthodes analytiques et numériques s'accordent à dire que les équilibres sont stables.
- La figure 4.6 montre la solution EDP obtenue en utilisant le jeu de paramètres 1 avec $E^* = (8.2688, 2.4524)$. Dans ce cas, $R_0 = 2.7764 > 1$ et par le théorème 3.3, E^* est globalement asymptotiquement stable.
- La figure 4.7 montre la solution EDP obtenue en utilisant le jeu de paramètres 2 avec $E^* = (9.8534, 0.5509)$. Depuis $R_0 = 2.7764 > 1$, E^* est globalement asymptotiquement stable.
- La figure 4.8 montre la solution EDP obtenue en utilisant le jeu de paramètres 3 avec $E_0 = (8.75, 0)$. Dans ce cas, $R_0 = 0.8750 < 1$ et en utilisant le théorème 3.2 avec $\theta \in \left[\frac{25}{24}, 1.2449 \right]$, E_0 est globalement asymptotiquement stable.
- La figure 4.9 montre la solution EDP obtenue en utilisant le jeu de paramètres 4 avec $E_0 = (8.75, 0)$. Dans ce scénario, nous avons à nouveau $R_0 = 0.8750 < 1$ et avec $\theta \in \left[\frac{529}{504}, 1.2449 \right]$, E_0 est globalement asymptotiquement stable.

4.2 Deuxième exemple

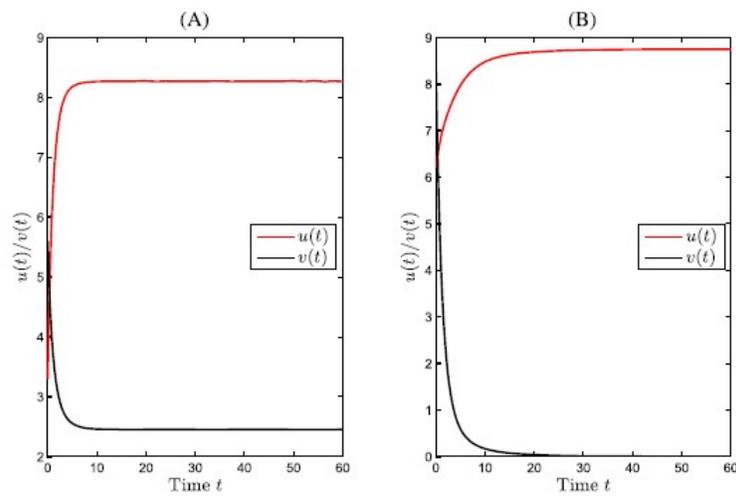


FIGURE 4.4 – Solutions numériques du système (4.2) (cas EDO) soumis aux premier et deuxième ensembles de paramètres.

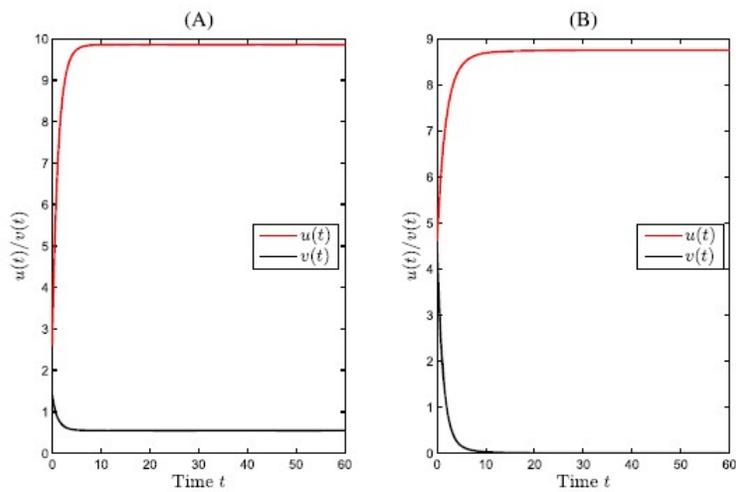


FIGURE 4.5 – Solutions numériques du système (4.2) (cas EDO) soumises aux troisième et quatrième ensembles de paramètres.

4.2 Deuxième exemple

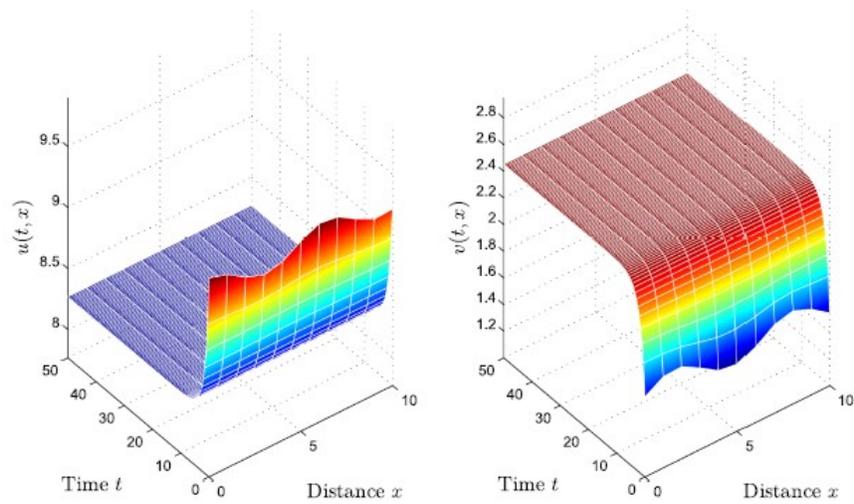


FIGURE 4.6 – Solutions numériques du système (4.2) soumis au premier ensemble de paramètres.

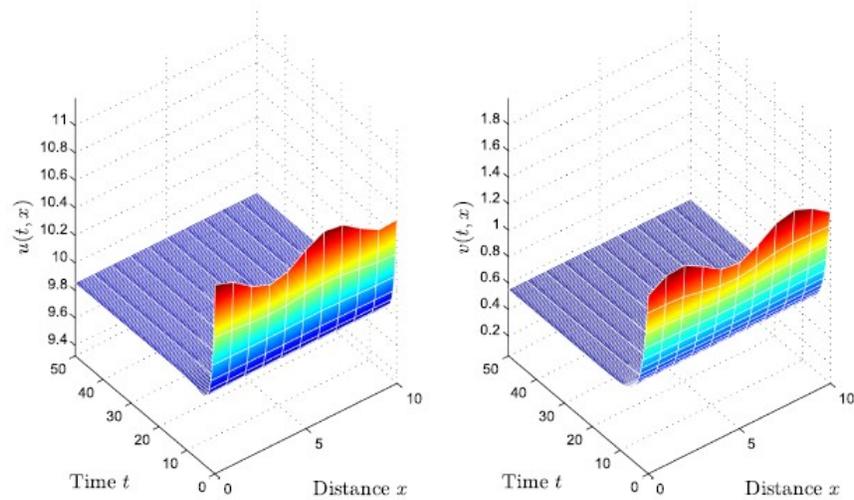


FIGURE 4.7 – Solutions numériques du système (4.2) soumis au deuxième ensemble de paramètres.

4.2 Deuxième exemple

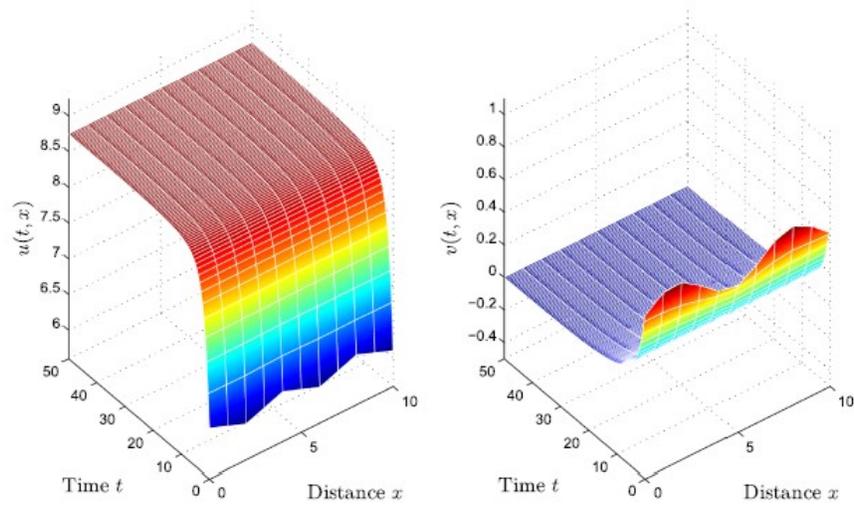


FIGURE 4.8 – Solutions numériques du système (4.2) soumis au troisième ensemble de paramètres.

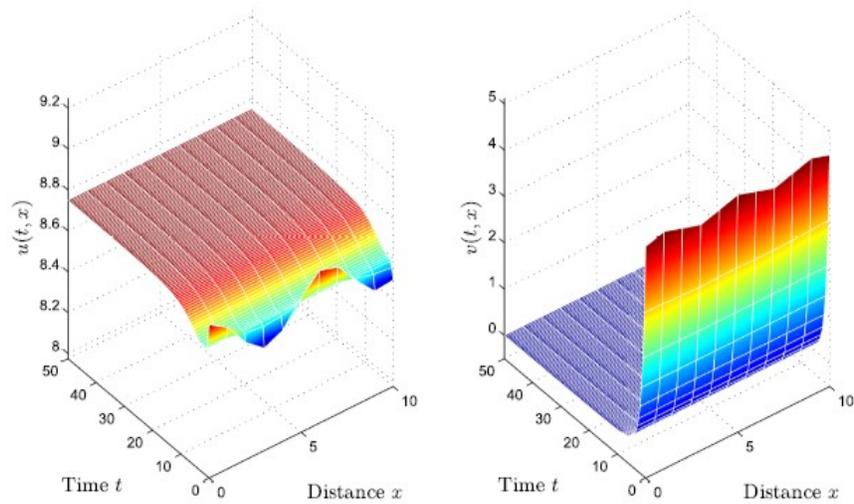


FIGURE 4.9 – Solutions numériques du système (4.2) soumis au quatrième ensemble de paramètres.

4.3 Troisième exemple

Le dernier exemple est obtenu en remplaçant $\varphi(v) = \frac{kv}{1+(\frac{v}{\alpha})}$, ce qui donne le même système étudié dans [7],[24] mais avec $d_1 = d_2 = 0$. Le système résultant est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = -\lambda k \frac{v}{1+(\frac{v}{\alpha})} u + \Lambda - \mu u & \text{sur } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = \lambda k \frac{v}{1+(\frac{v}{\alpha})} u - \sigma v & \text{sur } (0, \infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x) & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } (0, \infty) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.3)$$

pour $\alpha > 0$ et $k > 0$. Les conditions imposées peuvent être vérifiées comme

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(v) = \frac{k}{(1+(\frac{v}{\alpha}))^2} > 0 \quad \text{pour tout } v \geq 0, \\ v\varphi'(v) = v \frac{k}{(1+(\frac{v}{\alpha}))^2} \leq \frac{kv}{1+(\frac{v}{\alpha})} = \varphi(v). \end{cases}$$

Les états stationnaires du système (4.3) sont donnée par $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ et $E^* = (\frac{\sigma(\alpha+v^*)}{\lambda\alpha k}, \mu\alpha \frac{(R_0-1)}{(\lambda\alpha k + \mu)})$ avec le nombre de reproduction $R_0 = \frac{\lambda\Lambda}{\mu\sigma} k > 1$. Notons que si E^* existe qu'il est globalement asymptotiquement stable et que E_0 est globalement asymptotiquement stable si $\frac{(d_1+d_2)^2}{4d_1d_2} \leq \theta \leq \frac{\mu}{\Lambda} \left(\frac{\mu+\sigma}{\lambda k} - \frac{\Lambda}{\sigma} \right)$ lorsque $d_1 \neq d_2$ et si $\theta = 1$ quand $d_1 = d_2$ ou dans le cas EDO. Le tableau 4.3 détaille les ensembles de paramètres utilisés dans les simulations numériques.

4.3 Troisième exemple

TABLE 4.3 – Paramètres de simulation pour l'exemple 3 : système (4.3).

	Ensemble	Figure	u_0	v_0	d_1	d_2	λ	α	σ	Λ	μ	k	R_0
Cas EDO	Ensemble 1	4.10(A)	3.3	5.6	-	-	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	18.6667
	Ensemble 2	4.10(B)	3.3	5.6	-	-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{34}$	0.1544
	Ensemble 3	4.11(A)	2.6	1.4	-	-	2	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{5}$	8	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	10
	Ensemble 4	4.11(B)	2.6	1.4	-	-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{17}$	0.4941
Cas EDP	Ensemble 1	4.12	$5.7 + \frac{\cos(x)}{10}$	$5.6 + \frac{\sin(x)}{10}$	3	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	18.6667
	Ensemble 2	4.13	$0.6 + \frac{\cos(x)}{7}$	$0.4 + \frac{\sin(x)}{8}$	5	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	18.6667
	Ensemble 3	4.14	$10.1 + \frac{\cos(x)}{7}$	$0.4 + \frac{\sin(x)}{8}$	2	1	2	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{5}$	8	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	10
	Ensemble 4	4.15	$0.5 + \frac{\cos(x)}{10}$	$5 + \frac{\sin(x)}{10}$	3	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{34}$	0.1544
	Ensemble 5	4.16	$0.6 + \frac{\cos(x)}{7}$	$0.4 + \frac{\sin(x)}{8}$	$\frac{13}{4}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{17}$	0.4941

Voici une description des résultats :

- Les figures 4.10 et 4.11 montrent les solutions numériques du système (4.3) résultant des quatre ensembles de paramètres dans le cas EDO avec des états stationnaires $E^* = (11.1857, 5.3)$, $E_0 = (1.75, 0)$, $E^* = (10.9548, 1.1613)$ et $E_0 = (1.4, 0)$ respectivement. Dans les quatre scénarios, les méthodes analytiques et numériques conviennent que les équilibres sont stables.
- La figure 4.12 montre la solution EDP obtenue en utilisant le jeu de paramètres 1 avec $E^* = (11.1857, 5.3)$. Dans ce cas, $R_0 = 18.6667 > 1$ et par le théorème 3.3, E^* est globalement asymptotiquement stable.
- La figure 4.13 montre la solution EDP obtenue en utilisant le jeu de paramètres 2 avec $E^* = (11.1857, 5.3)$. Dans ce cas, $R_0 = 18.6667 > 1$ et E^* est globalement asymptotiquement stable.
- La figure 4.14 montre la solution EDP obtenue en utilisant le jeu de paramètres 3 avec $E^* = (10.9548, 1.1613)$. Dans ce cas, $R_0 = 10 > 1$ et E^* est globalement asymptotiquement stable.
- La figure 4.15 montre la solution EDP obtenue en utilisant le jeu de paramètres 4 avec $E_0 = (1.75, 0)$. Dans ce cas, $R_0 = 0.1544 < 1$ et par le théorème 3.2 avec $\theta \in \left[\frac{289}{240}, 11.1701 \right]$, E_0 est globalement asymptotiquement stable.

4.3 Troisième exemple

- La figure 4.16 montre la solution EDP obtenue en utilisant le jeu de paramètres 5 avec $E_0 = (1.4, 0)$. Dans ce cas, $R_0 = 0.4941 < 1$ et par le théorème 3.2 avec $\theta \in \left[\frac{441}{416}, 2.9014\right]$, E_0 est globalement asymptotiquement stable.

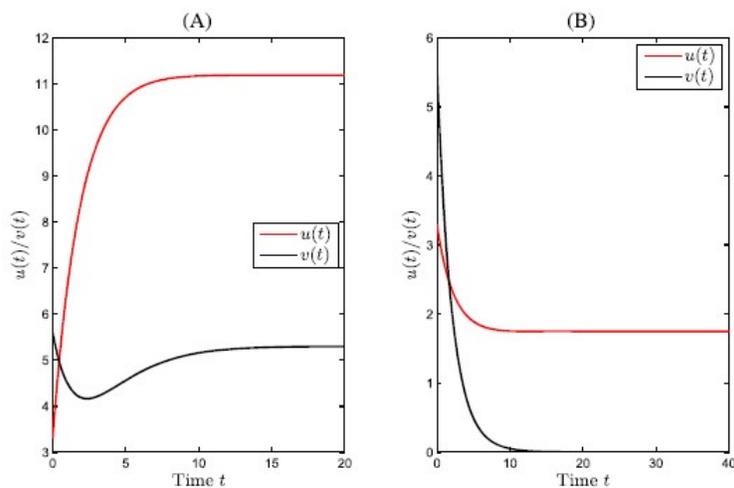


FIGURE 4.10 – Solutions numériques du système (4.3) (cas EDO) soumises aux premier et deuxième ensembles de paramètres.

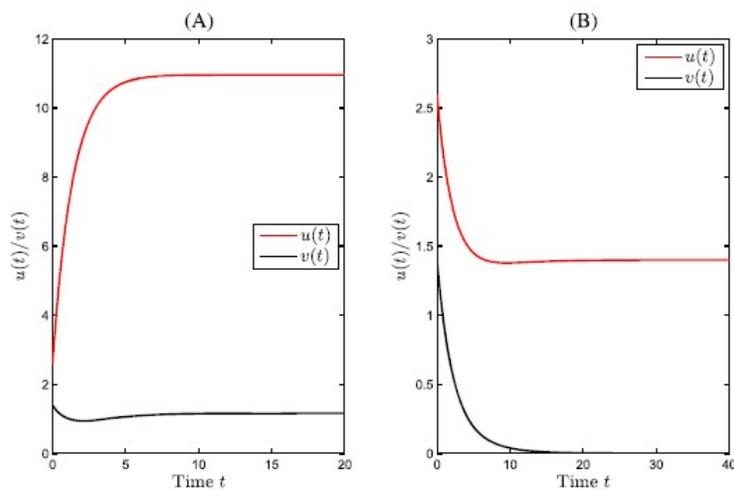


FIGURE 4.11 – Solutions numériques du système (4.3) (cas EDO) soumises aux troisième et quatrième ensembles de paramètres.

4.3 Troisième exemple

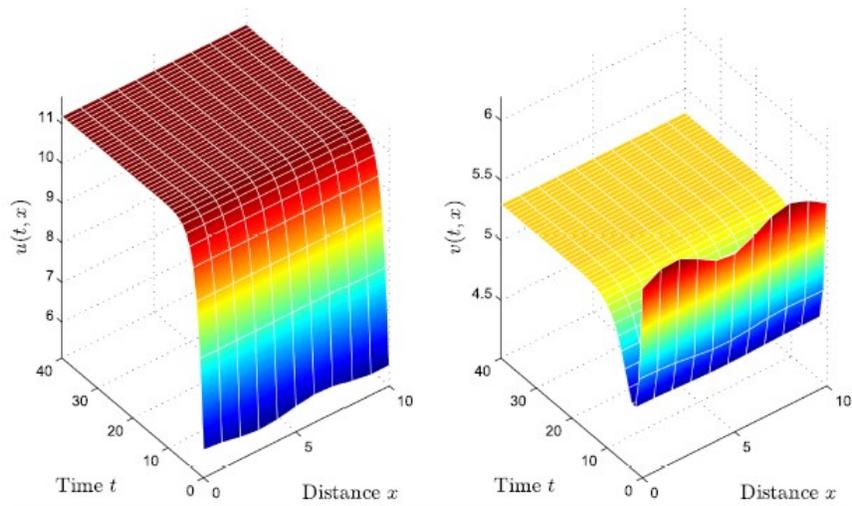


FIGURE 4.12 – Solutions numériques du système (4.3) soumis au premier ensemble de paramètres.

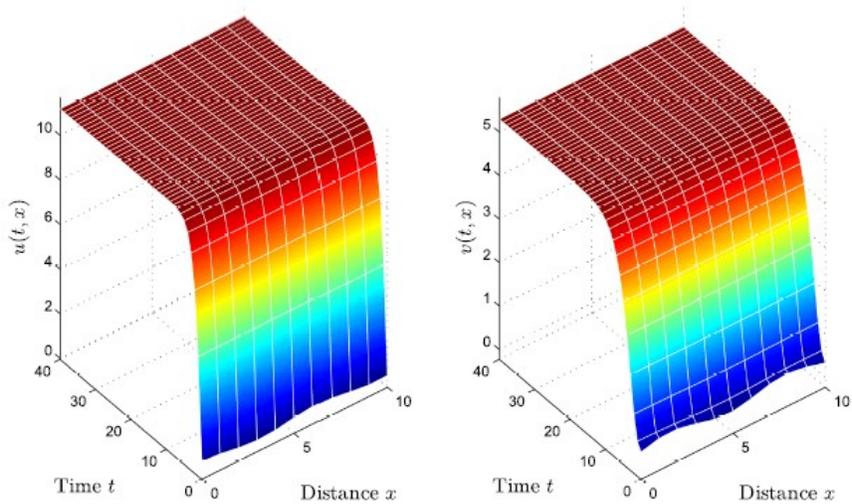


FIGURE 4.13 – Solutions numériques du système (4.3) soumis au deuxième ensemble de paramètres.

4.3 Troisième exemple

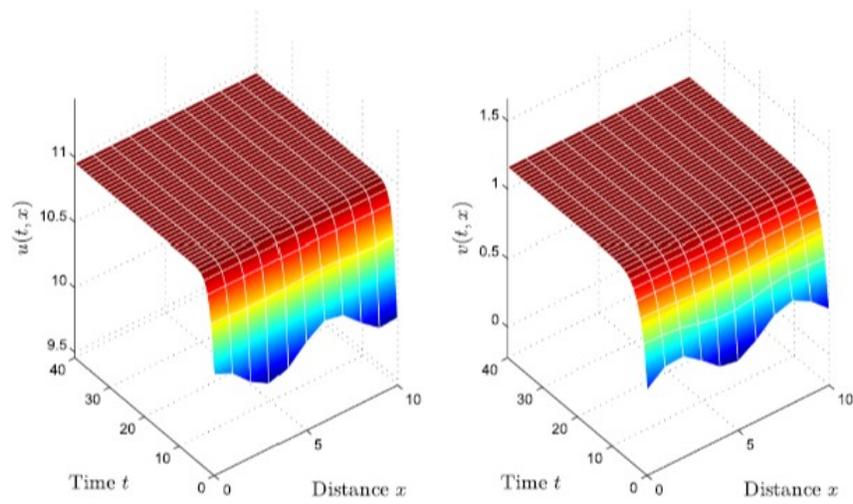


FIGURE 4.14 – Solutions numériques du système (4.3) soumis au troisième ensemble de paramètres.

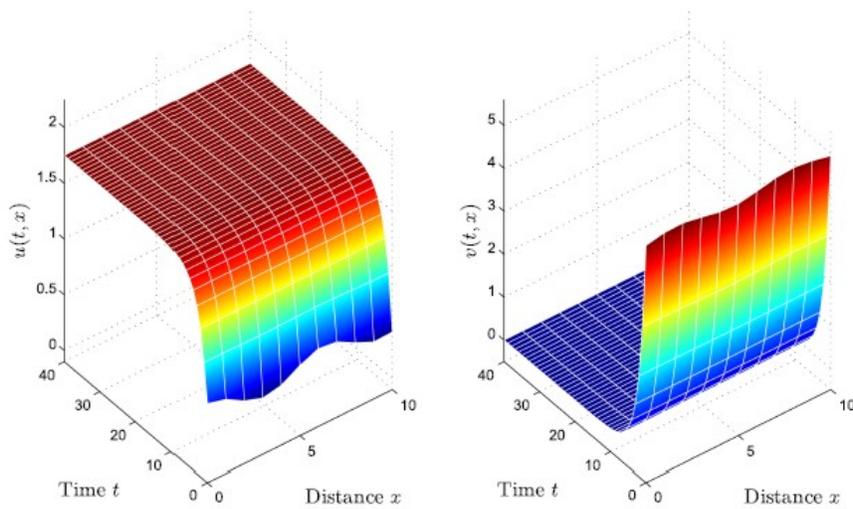


FIGURE 4.15 – Solutions numériques du système (4.3) soumis au quatrième ensemble de paramètres.

4.3 Troisième exemple

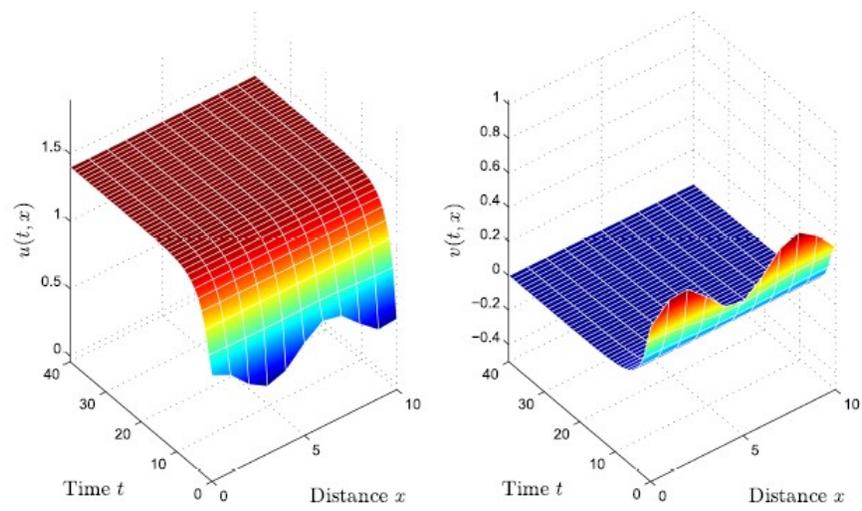


FIGURE 4.16 – Solutions numériques du système (4.3) soumis au cinquième ensemble de paramètres.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un système d'équations aux dérivées partielles de type parabolique.

Ce système décrit la propagation de certaines épidémies dans une population divisée en deux classes, les susceptibles et les infectés.

L'étude concerne la stabilité locale et asymptotique des points d'équilibres du système sans diffusion et avec diffusion.

L'outil utilisé pour l'existence des solutions est le théorème de Hille-Yosida et les résultats établis sont obtenus par le critère des valeurs propres et les fonctionnelles de Lyapunov. Enfin, en termes d'illustration de cette étude, nous avons achevé ce travail par une étude numérique sur trois exemples différents.

Bibliographie

- [1] S. Abdelmalek, S. Bendoukha, Global Asymptotic Stability of a diffusive SIVR epidemic model with Immigration, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2016(284) (2016), pp. 1–14.
- [2] S. Abdelmalek, S. Bendoukha, B. Rebiai, On the stability and nonexistence of turing patterns for the generalized Lengyel-Epstein model, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 40(18) (2017), pp. 6295–6305.
- [3] T. Abha, A. Agrawal, Stability Analysis of an SIR epidemic model, *JMLB A multi-disciplinary research journal*, Vol. 1(3) (2015), pp. 281–284.
- [4] M.E. Alexander, S.M. Moghadas, Periodicity in an epidemic model with a generalized non-linear incidence, *Mathematical Biosciences*, Vol. 189 (2004), pp. 75–96.
- [5] E. Avila–Vales, E. Rivero–Esquivel, G.E. Garcia–Almeida, Global Dynamics of a Periodic SEIRS Model with General Incidence Rate, *International Journal of Differential Equations*, Vol. 2017 (2017), ID 5796958.
- [6] F. Brauer, P. Van den Driessche, Models for transmission of disease with immigration of infectives, *Math Biosci*, Vol. 171 (2001), pp. 143–154.
- [7] V. Capasso, G. Serio, A Generalization of the Kermack-McKendrick Deterministic Epidemic Model, *Mathematical Biosciences*, Vol. 42 (1978), pp. 43–61.
- [8] S. Che, Y. Xue, L. Ma, The Stability of Highly Pathogenic Avian Influenza Epidemic Model with Saturated Contact Rate, *Applied Mathematics*, Vol. 5 (2014), pp. 3365–3371.
- [9] S. Chinviriyasit, W. Chinviriyasit, Numerical modelling of an SIR epidemic model with diffusion, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 216 (2010), pp. 395–409.

BIBLIOGRAPHIE

- [10] L. Djebara, R. Douaifia, S. Abdelmalek, S. Bendoukha, Global and local asymptotic stability of an epidemic reaction-diffusion model with a nonlinear incidence , *Math Meth Appl Sci.* 2022,pp. 1–25.
- [11] W.E. Fitzgibbon, M. Langlais, M.E. Parrott, and G.F. Webb, A diffusive system with age dependency modeling FIV, *Nonlin. Anal.*, Vol. 25 (1995), pp. 975–989.
- [12] W.M. Haddad, V. Chellaboina, Q. Hui, *Nonnegative and Compartmental Dynamical Systems*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (2010).
- [13] Y. Hamaya, On the asymptotic behavior of a diffusive epidemic model (AIDS), *Non-linear Analysis*, Vol. 36 (1999), pp. 685–696.
- [14] S. Henshaw, C.C. McCluskey, Global stability of a vaccination model with immigration, *Electron. J. of Diff. Eqs.*, Vol. 2015(92) (2015), pp. 1–10.
- [15] H.W. Hethcote, Qualitative analysis for communicable disease models, *Math. Biosci*, Vol. 28 (1976), pp. 335–356.
- [16] J. Jia, G. Qin, Stability analysis of HIV/AIDS epidemic model with nonlinear incidence and treatment, *Advances in Difference Equations*, Vol. 2017 (2017), ID 136.
- [17] K.I. Kim, Z. Lin, L. Zhang, Avian-human influenza epidemic model with diffusion, *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, Vol. 11 (2010), pp. 313–322.
- [18] A. Korobeinikov, G.C. Wake, Lyapunov functions and global stability for SIR, SIRS and SIS epidemiological models, *Appl. Math. Lett.*, Vol. 15(8) (2002), pp. 955–961.
- [19] A. Korobeinikov, P.K. Maini, Nonlinear incidence and stability of infectious disease models, *Mathematical Medicine and Biology*, Vol. 22 (2005), pp. 113–128.
- [20] A. Korobeinikov, functions and global stability for SIR and SIRS epidemiological models with nonlinear transmission, *Bulletin of Mathematical biology*, Vol. 68(3) (2006), pp. 615–626.
- [21] T. Kuniya, Global stability of a multi-group SVIR epidemic model, *Nonlinear Anal. : Real World Apps.*, Vol. 14 (2013), pp. 1135– 1143
- [22] T. Kuniya, J. Wang, Lyapunov functions and global stability for a spatially diffusive SIR epidemic model, *Applicable Analysis*, Vol. 96(11) (2017), pp. 1935–1960.

BIBLIOGRAPHIE

- [23] A. Lahrouz, L. Omari, D. Kiouach, Global analysis of a deterministic and stochastic nonlinear SIRS epidemic model, *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, Vol. 16(1) (2011), pp. 59–76,.
- [24] G. Li, W. Wang, Bifurcation analysis of an epidemic model with nonlinear incidence, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 214 (2009), pp. 411–423.
- [25] J. Li, Y. Yang, Y. Xiao and S. Liu, A class of Lyapunov functions and the global stability of some epidemic models with nonlinear incidence, *J. Appl. Anal. Comput.*, Vol. 6(1) (2016), pp. 38–46.
- [26] M.Y. Li, J.S. Muldowney, Global stability of SEIR models in epidemiology, *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, Vol. 7 (1999).
- [27] W. Ma, M. Song, Global Stability of an SIR Epidemic Model with Time Delay, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 17 (2004), pp. 1141–1145.
- [28] P. Quittner, P. Souplet, *Superlinear Parabolic Problems : Blow-up, Global Existence and Steady States*, Birkhauser Verlag AG, Basel. Boston, Berlin, (2007).
- [29] S. Ruan, W. Wang, Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate, *J. Differ. Equations*, Vol. 188 (2003), pp. 135–136.
- [30] S. Al-Sheikh, F. Musali, Stability Analysis of an HIV/AIDS Epidemic Model with Screening, *Int. Math. Forum*, Vol. 6(66) (2011), pp. 3251–3273.
- [31] R.P. Sigdel, C. Connell McCluskey, Global stability for an SEI model of infectious disease with immigration, *Applied Math. and Comp.*, Vol. 243 (2014), pp. 684–689.
- [32] P. Van den Driessche, J. Watmough, A simple SIS epidemic model with a backward bifurcation, *J. Math. Biol.*, Vol. 40(6) (2000), pp. 525–540.
- [33] P. Van den Driessche, J. Watmough, Reproduction numbers and sub-threshold endemic, *Mathematical Biosciences*, Vol. 180 (2002), pp. 29–48.
- [34] Z.W. Wang, Backward Bifurcation in Simple SIS Model, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, Vol. 25(1) (2009), pp. 127–136.
- [35] G.F. Webb, A reaction-diffusion model for a deterministic diffusive epidemic, *J. Math. Analysis and App.*, Vol. 84(1) 1981, pp. 150– 161.
- [36] X. Zhang, X.N. Liu, Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function, *J. Math. Analysis and App.*, Vol. 348(1) (2008), pp. 433–443.

BIBLIOGRAPHIE

- [37] J. Zhang, J. Jia, X. Song, Analysis of an SEIR Epidemic Model with Saturated Incidence and Saturated Treatment Function, *Scientific World Journal*, Vol. 2014 (2014), ID 910421.
- [38] Y. Zhou, H. Lu, Stability of Periodic Solutions for an SIS Model with Pulse Vaccination, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 38 (2003), pp. 299–308.
- [39] H.L. Smith, *Monotone Dynamical Systems : An introduction to the theory of Competitive and Cooperative Systems*, American Math. Soc., (1995).
- [40] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer, New York, NY, USA, (1983).
- [41] M.H. Protter, H.F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, New York, NY : Springer, (1984).
- [42] N.D. Alikakos, An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations, *J. Differential Equations*, Vol. 33 (1979), pp. 201–225.
- [43] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840, Springer, Berlin, Germany, (1993).
- [44] R. Peng, X. Zhao, A reaction-diffusion SIS epidemic model in a time-periodic environment, *Nonlinearity*, Vol. 25 (2012), pp. 1451– 1471.
- [45] K. Deng, Asymptotic behavior of an SIR reaction-diffusion model with a linear source, *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, Vol. 24(11) (2019), pp. 5945–5957.
- [46] Meddour Halima, *Equations différentielles ordinaires 1*, Faculté de Mathématiques et informatiques , Département de Mathématiques, Université Mustapha Ben Boulaid de Batna.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة ديناميات نموذج وبائي لرد فعل- انتشار SI (حساس - معدي) بمعدل حدوث غير خطي يصف انتقال مرض معد بين الأفراد. نثبت أن النموذج المقترح له حالتان ثابتتان تحت شرط واحد. من خلال تحليل القيم الذاتية واستخدام طريقة الخطية و مبرهنة Lyapunov التي تم إنشاؤها بشكل مناسب، فإننا نؤسس الاستقرار المقارب المحلي والشامل للحالات المتوازنة الثابتة غير السالبة بشرط أن يكون عدد التكاثر الأساسي أكبر من الوحدة والتوازن الخالي من المرض بشرط أن يكون عدد التكاثر الأساسي أصغر من الوحدة في حالة المعادلات التفاضلية العادية. ومن خلال تطبيق مبرهنة Lyapunov التي تم إنشاؤها بشكل مناسب، نحدد شرط الاستقرار الشامل في حالة المعادلات التفاضلية الجزئية. وأخيرا نقدم بعض الأمثلة العددية التي توضح وتؤكد النتائج التحليلية التي تم الحصول عليها طوال المذكرة.

الكلمات المفتاحية: نموذج وبائي، معادلات تفاضلية عادية و جزئية، الاستقرار المقارب المحلي و الشامل، مبرهنة Lyapunov، عدد التكاثر الأساسي R_0 ، الوجود المحلي والشامل.

Abstract

The aim of this work is to study the dynamics of a reaction-diffusion SI (susceptible-infectious) epidemic model with a nonlinear incidence rate describing the transmission of a communicable disease between individuals. We prove that the propose model has two steady states under one condition. By analyzing the eigenvalues and using the linearization method and an appropriately constructed Lyapunov functional, we establish the local and global asymptotic stability of the non-negative constant steady states subject to the basic reproduction number being greater than unity and of the disease-free equilibrium subject to the basic reproduction number being smaller than unity in ODE case. By applying an appropriately constructed Lyapunov functional, we identify the condition of the global stability in the EDP case. Finally, we present some numerical examples illustrating and confirming the analytical results obtained throughout the work.

Key words:

Epidemic model, Ordinary and partial differential equations, Local and global asymptotic stability, Lyapunov function, The basic reproduction number R_0 , Local and global existence.

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier la dynamique d'un modèle épidémique de réaction-diffusion SI (sensible-infectieux) avec un taux d'incidence non linéaire décrivant la transmission d'une maladie transmissible entre individus. Nous prouvons que le modèle proposé a deux états stationnaires sous une condition. En analysant les valeurs propres et en utilisant la méthode de linéarisation et une fonctionnelle de Lyapunov convenablement construite, nous établissons la stabilité asymptotique locale et globale des états stationnaires constants non négatifs sous réserve que le nombre de reproduction de base soit supérieur à l'unité et de l'équilibre sans maladie sous réserve que le nombre de reproduction de base soit inférieur à l'unité dans le cas de l'ODE. En appliquant une fonctionnelle de Lyapunov construite de manière appropriée, nous identifions la condition de la stabilité globale dans le cas de EDP. Enfin, nous présentons quelques exemples numériques qui illustrent et confirment les résultats analytiques obtenus tout au long de ce mémoire.

Mots clés :

Modèle épidémique, Équations différentielles ordinaires et partielles, Stabilité asymptotique locale et globale, Fonction de Lyapunov, Le nombre de reproduction de base R_0 , Existence locale et globale.