Corrigé des Exercices TD ① EDO L3

Ex ⑤

La fct $f(t,y) = \sqrt{|t|}\, \sin\left(\frac{y}{|t|}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$?

à première vue on a $I =]0,+\infty[$ (ou $]-\infty,0[$) et $\Omega = \mathbb{R}$. Mais puisque la fct $(t,y) \longmapsto \sin\left(\frac{y}{|t|}\right)$ est bornée où :

$-1 \leq \sin\left(\frac{y}{|t|}\right) \leq 1$ $\quad \forall\, t\in I, \forall y \in \Omega$ on aura

$-\sqrt{|t|} \leq f(t,y) \leq \sqrt{|t|}$ $\quad$ Et donc $f(t,y) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

Ainsi 1 prolongement par continuité de f existe et donc sera $f(t,y) = \begin{cases} \sqrt{|t|}\, \sin\left(\frac{y}{|t|}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Alors $I = \mathbb{R} = \Omega$.

Donc f est continue sur $I\times\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

En plus $y \longmapsto \sqrt{|t|}\, \sin\left(\frac{y}{|t|}\right)$ est de classe C^1 en y pour tout t fixé.

f loc Lip ? $\quad$ Soit $t_0 \in I$ tq $y(t_0) = y_0$:

Supposons $\exists\, T > 0, \exists\, r_0 > 0$ tq f est loc Lip où

$\forall (t, y_1) \in C = [t_0 - T, t_0 + T] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$, $\forall (t, y_2) \in C$, $\exists k \geq 0$:

$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k\, |y_1 - y_2|$.

Prenons $y_0 = 0 = t_0$. Et spécialement $y_2 = 0$.

Alors si $|f(t,y_1) - f(t,0)| \leq k\,|y_1 - 0|$ alors

$\left| \sqrt{|t|}\, \sin\left(\frac{y_1}{|t|}\right) \right| \leq k\,|y_1| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{|t|}} \left| \frac{\sin\left(\frac{y}{|t|}\right)}{y/|t|} \right| \leq k$

Mais $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{|t|}} = +\infty$ et $\left| \frac{\sin y/|t|}{y/|t|} \right| \xrightarrow[y \to 0]{} 1$

Donc f n'est pas loc Lip sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Ex 7

$$\begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad , \; I = \Omega = \mathbb{R}$$

La fct $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t, y) \longmapsto t^2 + e^{-y^2}$$

est 1 fct continue sur $I \times \Omega$; étant la somme de 2 fcts continues (fcts carrée + exponentielle)

Soient $T_0 > 0$ et $r_0 > 0$ prenons par exemple $T_0 = \frac{1}{2}$, $r_0 = \frac{1}{3}$

On prend $C = [t_0 - T , t_0 + T] \times [y_0 - r_0 , y_0 + r_0]$

$$C = [-T, T] \times [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}]$$

En plus $M = \sup_{(t,y) \in C} |f(t,y)| = T_0^2 + 1 = \frac{5}{4}$

Alors $\exists\, T = \min (T_0 , \frac{r_0}{M}) = \frac{4}{15}$, tq (P) admet 1 sol loc y déf sur $[-\frac{4}{15}, \frac{4}{15}]$ à valeurs dans $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

Ex ⑧

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ 1 fct cont où $\forall t \in \mathbb{R} : f(t) > 0$.
Et $y_0 \in \mathbb{R}$.

1. $F' = \frac{1}{f}$ et $F(t_0) = 0$.

F continue car f l'est sur $\mathbb{R}$.
$F' > 0 \Rightarrow F$ str croissante $/\mathbb{R}$ $\Big\} \Rightarrow F$ bij de $\mathbb{R}$ dans $F(\mathbb{R})$.

J ouvert car les extremités de J sont les limites de F.

2. On a $F(t_0) = 0 \Rightarrow F^{-1}(0) = t_0$

F de classe C^1 où $F'(x) = \frac{1}{f(x)} > 0$

Donc $F^{-1} \in C^1(J)$ où $(F^{-1}(t))' = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = f(F^{-1}(t))$

Ainsi F^{-1} est solution de $y' = f(y)$.

3. Si J est majoré et que a désigne son extrémité droite alors $F^{-1}(y) \xrightarrow[y \to a]{} +\infty$ car $F(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} a$

Il est donc impossible de prolonger F^{-1} en a.
De même pour le côté gauche de J.

Ex ⑨ Le faite que f soit en valeur absolue et change de valeurs au voisinage de la donnée initiale va influer sur la condition de loc lip. Ainsi f n'est pas loc lip ce qui ne nous donnera pas l'unicité de la solution selon le théo de Cauchy Lipschitz. Ainsi $\begin{cases} y' = 3|y|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

admet au moins 2 sols maximales.

Ex 10

(P) $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} & \text{— (1)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $I = \mathbb{R} = \Omega.$

1) La solution non nulle de (P) est $y(t) = \frac{1}{2} t |t|$, qui s'obtient en résolvant (1) par séparation des variables.

En plus la fct nulle $y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ vérifie (P), donc c'est 1 solution de (P).

2) La question (1) constitue un contre exemple du théo de Cauchy Lipschitz.

f étant non loc Lip car la donnée initiale $y(t_0) = y(0) = 0$ fait que f change de forme à droite et à gauche de y_0.

Ex (11)

$$(P)\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+ty} \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad I\times\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(t,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 1+ty=0\}.$$

1) f : cont sur $I\times\Omega$ car inverse d'1 fct cont non nulle.

$f \in C^1(I\times\Omega)$ où $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \dfrac{-t}{(1+ty)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = -\dfrac{y}{(1+ty)^2}$

D'après le théo de Cauchy Lipschitz f cont + loc lip alors $\exists!$ y sol de (P). y sol maximale.

2) Puisque $y(0)=0$ alors $J =]\alpha,\beta[$ où $\alpha<0<\beta$.

Soit z 1 fct déf sur $]-\beta,-\alpha[$ par $z(t)=-y(-t)$

Soit $t\in]-\beta,-\alpha[\Rightarrow z(t) = -y(-t)\in[-r_0,r_0]$ car $y(-t)\in[-r_0,r_0]$.

$$z'(t) = (-y(-t))' = y'(-t) = f(-t, y(-t))$$
$$= \frac{1}{1+(-t)(y(-t))} = f(t,y(-t)) = f(t,z(t))$$

En plus $z(0) = -y(-0) = 0$

Alors z est sol de (P) où $z(0)=0$, Mais y est la sol max de (P), donc y n'est que le prolongement de z, alor $]-\beta,-\alpha[\subsetneq]\alpha,\beta[$

Et $z = y|_{]-\beta,-\alpha[} \Rightarrow 0<\beta = -\alpha$

En plus $z = y|_{]-\beta,-\alpha[} \Rightarrow y(-t) = -y(t)$
$\forall t\in]-\beta,-\alpha[=]-\beta,\beta[$

Ainsi y est impaire sur $]-\beta,\beta[=]\alpha,\beta[$.

Ex (11) (Suite)

2) y str croissante sur J ?.

Puisque $f \in C(I \times \Omega) \Rightarrow y \in C^1(J)$

d'après la régularité de y.

Ainsi $y' = \frac{1}{1+ty} \neq 0 /_J$ car $y' \in C(J)$.

Donc y' est de signe constant sur J.

En plus $y'(0) = \frac{1}{1+0 \cdot y(0)} = 1 > 0 \Rightarrow y' > 0 /_J$

3) $J = \mathbb{R}$?.

Puisque y est str cr + impaire on aura y positive sur $\mathbb{R}_+$ où $J =]-\beta, \beta[$.

$\beta = +\infty$?. Par l'absurde supposons $\beta < +\infty$.

On a $\forall t \in [0, \beta[$

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t y'(s)\,ds = \int_0^t \frac{ds}{1+sy} \leq \int_0^t ds \leq \beta \\ \text{car } 0 \leq \frac{1}{1+sy} \leq 1 \end{cases}$$

Donc la fct y st croissante + majorée, elle admet donc 1 limite finie en β. Ce qui permet de prolonger y en 1 sol sur $]-\beta, \beta]$ ce qui contredit la maximalité de y.

D'où $\beta = +\infty$.

$\lim_{|t| \to \infty} y(t) = ?$. $y(t) = \int_0^t \frac{ds}{1+sy}$ et quand $t \to +\infty$

$\frac{1}{1+ty} \sim \frac{1}{l \cdot t}$, par comparaison des fcts positives on peut dire que $y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ ($l = \lim_{t \to +\infty} y(t)$ existe car y croissante).