Corrigé type. Module EP,1

Ex 1 (5 points)

1) non linéaire, non homogène, ordre 2 (0,5) (0,25) (0,25)

2) quasi-linéaire, non homogène, ordre 2 (0,5) (0,25) (0,25)

3) quasi-linéaire, homogène, ordre 3 (0,5) (0,25) (0,25)

4) linéaire, homogène, ordre 2 (0,5) (0,25) (0,25)

5) non linéaire, homogène, ordre 3 (0,5) (0,25) (0,25)

Ex2 (5 points)

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y \partial x} = y^2 x \iff \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) = y^2 x \quad (1)$$

en intégrant par rapport à y on trouve:

$$v(x,y) - v(x,y_0) = x\left[\frac{s^3}{3}\right]_{y_0}^{y} \quad (0,5)$$

d'où $v(x,y) = x\frac{y^3}{3} + f(x)$ .... (2) (0,5)

où $f(x) = v(x,y_0) + x\frac{y_0^3}{3}$ (0,5)

$$(2) \iff \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = x\, y^3/3 + f(x)$$

en intégrant par rapport à x on trouve:

$$u(x,y) = u(x_0,y) + \frac{y^3}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}\right) + \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds \quad (0,5)$$

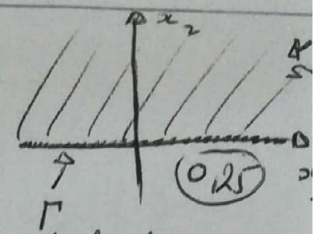
où f admet une primitive (1)

Donc: $u(x,y) = \frac{y^3 x^2}{6} + F(x) + G(y)$ (0,5)

où $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$ (0,5)

$$G(y) = u(x_0,y) - \frac{x_0^2 y^3}{6}$$

Ex3 (5 points)



Eq(1) est une EDP quasi-linéaire d'ordre 1, homogène de la forme:

$b(x,u)\nabla u + C(x,u) = 0$ (0,5)

où $b(x,u) = (1,1)$ et $C(x,u) = -u^4$

le système d'E.D.O caractéristiques associé est:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0,5) \\ \dot Z(s) = -C(x,u) = Z^4(s) \end{cases}$$

en intégrant par rapport à s on trouve:

$$\begin{cases} x_1(s) = s + x_1(0) = s + x_0 \quad (0,25) \\ x_2(s) = s + x_2(0) \quad (0,25) \end{cases}$$

et $\dot Z Z^{-4} = 1 \Rightarrow \left[\frac{Z^{-3}(s)}{-3}\right]_0^s = s$ (0,25)

$$\frac{1}{3Z^3(s)} = \frac{1-3sZ^3(0)}{3Z^3(0)}$$

d'où $Z^3(s) = \frac{Z^3(0)}{1-3sZ^3(0)}$

$$Z(s) = \frac{Z(0)}{(1-3sZ^3(0))^{1/3}} \quad (0,5)$$

d'après les conditions au bord:

$x_2(0) = 0$ (0,5) et $Z(0) = g(x_0)$ (0,5)

donc fixons un point (x_1, x_2) et cherchons s et x_0 tq: $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$

c.à.d: $x_2 = s$ (0,5) et $x_0 = x_1 - x_2$ (0,5)

Donc la solution est donnée par:

$$u(x,y) = Z(s) = \frac{g(x_1 - x_2)}{(1 - 3x_2\, g^3(x_1 - x_2))^{1/3}}$$

(0,5)

Scanned by CamScanner

Ex 4 (5 points)

1) Cette EDP représente l'équation de diffusion de la chaleur. (0,5)

2) on pose : $u(x,t) = \psi(t)\varphi(x)$, alors

$u_t - 9u_{xx} = 0 \iff \psi'(t)\varphi(x) - 9\psi(t)\varphi''(x) = 0$

D'où $\dfrac{\psi'(t)}{9\psi(t)} = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = C < 0$

posons $C = -\lambda^2 < 0$, dans ce cas on obtient deux EDO

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda^2\varphi(x) = 0 \quad \cdots \text{①} \quad (0,25) \\ \psi'(t) = -9\lambda^2\psi(t) \quad \cdots \text{②} \quad (0,25) \end{cases}$$

Résoudre l'EDO ①

la solution est de la forme :

$\varphi(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$

D'après les conditions aux bords :

$u(0,t) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$

$\Rightarrow a = 0$ (0,5)

et $u(\pi,t) = 0 \Rightarrow \varphi(\pi) = 0$

$\Rightarrow b\sin\lambda\pi = 0 \; (b \neq 0)$

$\Rightarrow \sin\lambda\pi = 0$

$\Rightarrow \lambda\pi = n\pi, \; n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{n\pi}{\pi} = n, \; n \in \mathbb{N}^*$ (0,5)

Donc on obtient une suite de solution $\varphi_n(x)$ dépendant de n, où $\begin{cases} \varphi_n(x) = B_n \sin nx \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ (0,5)

Résoudre l'EDO ②

$\psi'(t) = -9\lambda^2\psi(t)$

Donc $\psi_n(t) = C_n \exp(-9\lambda^2 t)$ (0,5)

où $\lambda^2 = n^2$

alors la solution de notre EDP est :

$u_n(x,t) = \psi_n(t)\varphi_n(x)$ (0,5)

$= C_n B_n \exp(-9n^2 t)\sin nx$

d'après le principe de superposition toute combinaison linéaire des solutions est aussi solution pour notre problème (0,5) et par passage à la limite quand $n \to +\infty$ (si la limite existe) on obtient :

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n B_n \exp(-9n^2 t)\sin nx$

$= \sum_{n \geq 1} b_n \exp(-9n^2 t)\sin xn$

d'après la condition initiale :

$u(x,0) = x = \sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$ (0,5)

donc b_n sont les coefficient de Fourier associés à la fonction f définient par : $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$. (0,5)

Scanned by CamScanner