Corrigé type " Examen Analyse 03.

Exercice 1 :

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, on utilise le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)/(1/n!) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1 \text{ donc}$$

la série converge. 1

2) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$, on a : $\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}+1} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$

série de Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$ donc 1

La série ~~converge~~ diverge.

3) $\sum_{n\geq 1} n \sin 1/n$, on a : $\lim_{n\to+\infty}(n \sin 1/n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin 1/n}{1/n} = 1 \neq 0$

donc la série diverge. 1

4) $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^n+n}$, on a : $\forall n \geq 0 : 0 \leq \frac{2^n}{3^n+n} \leq \frac{2^n}{3^n}$ (1)

et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n}{3^n}\right)^{1/n} = \frac{2}{3} < 1$ d'après le critère de Cauchy $\sum \frac{2^n}{3^n}$ converge et de de (1) (par comparaison) :

$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^n+n}$ converge 1

~~Exercice 2~~

Exercice 2 : $\forall n \geq 0 : f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$, $x \in [0, 1]$.

1) pour $x = 0$, on a : $f_n(0) = 0 \ \forall n \geq 0$.

Pour $x \neq 0$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2 x} = 0$.

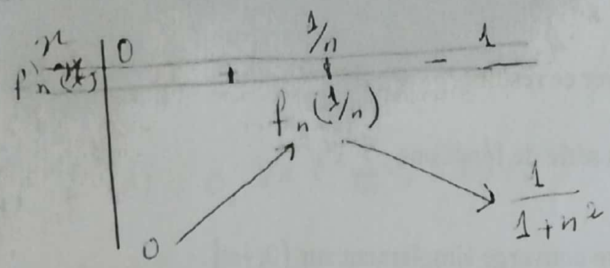
Donc $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in [0, 1]$

et la suite $\{f_n\}$ converge vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ et f est dérivable (fonction constante)

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et

on a : $\forall x \in [0, 1]$ $f'_n(x) = \dfrac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}$

et on a le tableau de variation de f_n



donc :

$\forall x \in [0, 1]$: $0 \leq f_n(x) \leq f_n(1/n)$ et

$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et comme $f(x) = 0$ sur $[0, 1]$ on a :

$\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n\|_\infty = \dfrac{2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

alors $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] : f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

donc ;

- Pour $x = 0$ $f_n'(0) = 1$

- Pour $x \neq 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-n^2x^2}{n^4x^4} = 0$

Alors la suite $\{f_n'\}$ converge vers la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

4) de ① et ③ il est clair que $f' \neq g$ sur $[0,1]$

$(f'(x) = 0,\ \forall x \in [0,1])$.

~~Ceci est dû au~~

L'égalité n'est pas vérifiée car l'une des conditions du théorème de la dérivabilité (suite des fonctions) n'est pas vérifiée

$\{f_n'\}$ ne converge pas vers g uniformément.

Exercice 03

Soit la série de fonctions $\sum x^2 e^{-nx}$

1) Montrons que cette série converge simplement sur $[0,+\infty[$.

- Pour $x=0$ $\sum_{n\geq 0} x^2 e^{-nx} = 0$ elle converge.

- Pour $x \neq 0$, appliquons le critère de D'Alembert : $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^2 e^{-(n+1)x}}{x^2 e^{-nx}} = e^{-x} < 1 \ (x>0)$

donc la série converge simplement sur $[0,+\infty[$.

2) on a : $\forall n \geq 0$: $\|f_n\|_\infty = \sup_{[0,+\infty[} |f_n(x)|$.

$\{f_n\}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et,

$\forall x \in [0,+\infty[$: $f_n'(x) = 2x e^{-nx} - nx^2 e^{-nx}$

$= x e^{-nx}(2-nx)$

donc :

x	0		$2/n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$		$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(2/n)$	$\searrow$	0

f_n atteint son max en $x = \frac{2}{n}$ et

on a : $f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2} e^{-2}$, $\|f_n\|_\infty = \frac{4}{n^2} e^{-2} \sim \frac{1}{n^2}$

Donc $\sum x^2 e^{-nx}$ converge ~~unif~~ normalement sur $[0,+\infty[$.

3) Oui on a la convergence uniforme car la convergence ~~uniforme~~ normale $\Rightarrow$ la convergence uniforme.

4) Les fonctions $f_n : x \longmapsto x^2 e^{-nx}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et la série $\sum x^2 e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ alors la fonction S est continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice 4 :

1) $f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n$, R son rayon de convergence est : $R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1$

Pour $x = R = 1$ $\sum 1^n$ diverge et $x = -R = -1$ $\sum (-1)^n$ diverge donc le domaine de ~~convergence~~ définition $D =]-1,1[$.

$g(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ son rayon de convergence R' est

$$R' = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^n/n}{(-1)^{n+1}/n+1} \right| = 1 \text{ pour } x = 1.$$

1

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (série alternée convergente)

Pour $x = -1 \rightsquigarrow \sum \frac{(-1)^n(-1)^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ diverge donc

le domaine de définition est : $]-1, 1]$.

2) Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ (somme d'une série géométrique)

1

donc $f(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}$ $\left(\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0 \text{ pour } |x|<1\right)$.

3) on a : $f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$

1

Pour $x \in]-1, 1[$, $-x \in]-1, 1[$

donc : $f(-x) = \sum_{n\geq 0} (-x)^n = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$

en intégrant cette série par terme on trouve :

$$g(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

donc $g(x) = \ln(1+x)$.

Scanned by CamScanner

Université de Batna

Faculté de mathématiques et d'informatique

Département de mathématiques

$2^{ème}$ année Mathématiques

2018-2019

Module : Analyse 03

Examen final

Exercice 1 (4pts) : Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$1)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\ ;\quad 2)\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\ ;\quad 3)\sum_{n\geq 1} n\sin(1/n)\ ;\quad 4)\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{3^n+n}\ .$$

Exercice 2 (6pts) : Soit la suite de fonctions définie par $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) = \dfrac{x}{n^2x^2+1}$.

1) Montrer que la suite $\{f_n\}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction dérivable qu'on notera f.
2) Montrer que $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
3) Déterminer la suite des dérivées $\{f'_n\}$ et montrer qu'elle converge simplement vers une fonction qu'on notera g.
4) A-t-on $f' = g$? Justifier ce résultat.

Exercice 3 (6pts) : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} x^2 e^{-nx}$.

1) Montrer que cette série converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2) Calculer $\|f_n\|_\infty$ et en déduire que la série converge normalement sur $[0,+\infty[$.
3) A-t-on la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$? Expliquer.
4) Posons $S(x) = \sum_{n\geq 0} x^2 e^{-nx}$, montrer que la fonction S est continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice 4 (4pts) : on considère les séries entières : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

1) Calculer le rayon de convergence des séries f et g et en déduire leur domaine de définition.
2) Exprimer la formule de *f(x)*.
3) En déduire la formule de *g(x)* en fonctions élémentaires.

Bon courage.