Corrigé-type de l'examen final

Th. de. Contr. stochastique

Exercice 1: (06 points)

considérons l'équation:

$$dx(t) = (A_0 x(t) + f_0(t))dt + \sum_{k=1}^{r} (A_k x(t) + f_k(t)) dw_k(t) \quad \text{--- (1)}$$

comme $(A_0, A_1, \ldots, A_r)$ est exp stable en moment d'ordre 2, alors

il existe $M>0, \alpha>0$ telles que:
$$\begin{cases} \|e^{A(t-t_0)} x_0\|^2 \leq M e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|^2; \; t \geq t_0 \\ E(\|x(t)\|^2) \leq M e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|^2; \; t \geq t_0 \end{cases} \quad \text{--> (2)}$$

la solution du système (1) est donnée par:

$$x(t) = e^{A_0(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} f_0(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} \sum_{k=1}^{r} (A_k x(s) + f_k(s)) dw_k(s)$$

Alors

$$x(t) = e^{A_0(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} f_0(s)\,ds + \sum_{k=1}^{r}\int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} (A_k x(s) + f_k(s)) dw_k(s)$$

donc:

$$\|x(t)\|^2 = \|e^{A_0(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} f_0(s)\,ds\|^2 + \|\sum_{k=1}^{r}\int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} (A_k x(s) + f_k(s)) dw_k(s)\|^2$$
$$+ 2\langle e^{A_0(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} f_0(s)\,ds, \sum_{k=1}^{r}\int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} (A_k x(s) + f_k(s)) dw_k(s)\rangle$$

$$\Rightarrow E(\|x(t)\|^2) = \|e^{A_0(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} f_0(s)\,ds\|^2 + E\|\sum_{k=1}^{r}\int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} (A_k x(s) + f_k(s)) dw_k(s)\|^2$$
$$+ 2\langle e^{A_0(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} f_0(s)\,ds, E[\sum_{k=1}^{r}\int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} (A_k x(s) + f_k(s)) dw_k(s)]\rangle$$

$$\Rightarrow E(\|x(t)\|^2) \leq 2\|e^{A_0(t-t_0)} x_0\|^2 + \|\int_{t_0}^{t} e^{A_0(t-s)} f_0(s)\,ds\|^2$$
$$+ \sum_{k=1}^{r} E\int_{t_0}^{t} \|e^{A_0(t-s)} (A_k x(s) + f_k(s))\|^2 ds$$

$$\leq 2\Big[M e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|^2 + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \|f_0(s)\|^2 ds$$
$$+ \sum_{k=1}^{r} M \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \big[\|A_k\|^2 E(\|x(s)\|^2) + 2\|f_k(s)\|^2\big] ds$$

$$\Rightarrow E(\|x(t)\|^2) \leq 2M e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|^2 + \sum_{k=0}^{r} \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \|f_k(s)\|^2 ds$$
$$+ 2M\Big(\sum_{k=1}^{r} \|A_k\|^2\Big) \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} e^{-\alpha(s-t_0)} \|x_0\|^2 ds$$
$$= 2M\Big[e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|^2 + \sum_{k=0}^{r} \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \|f_k(s)\|^2 ds\Big]$$
$$+ 2M\Big(\sum_{k=1}^{r} \|A_k\|^2\Big) e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|^2 \int_{t_0}^{t} ds$$

$$\Rightarrow \exists C > 0 \text{ t.q: } E(\|x(t)\|^2) \leq C\Big[e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|^2 + \sum_{k=0}^{r} \int_{t_0}^{t} \quad \text{--- (3)}$$

ii) D'après (3) on a:

$$E\int_{t_0}^{+\infty} \|x(t)\|^2 dt \le c\left[\int_{t_0}^{+\infty} e^{-\alpha(t-t_0)}\|x_0\|^2 dt + \sum_{k=0}^{r}\int_{t_0}^{+\infty}\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|f_k(s)\|^2 ds\right]$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} e^{-\alpha(t-t_0)}\|x_0\|^2 dt = \|x_0\|^2 \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha(t-t_0)}\Big|_{t_0}^{+\infty} = -\frac{1}{\alpha}\|x_0\|^2\left(e^{-\alpha(t-t_0)}\Big|_{t_0}^{+\infty}\right)$$

$$= \frac{\|x_0\|^2}{\alpha}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on trouve que:

$$\int_{t_0}^{+\infty}\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|f_k(s)\|^2 ds = \int_{t_0}^{+\infty}\left(\int_{s}^{+\infty} e^{-\alpha(t-s)} dt\right)\|f_k(s)\|^2 ds$$

$$= \int_{t_0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha(t-s)}\Big|_{s}^{+\infty}\right)\|f_k(s)\|^2 ds$$

$$= \int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{\alpha}\|f_k(s)\|^2 ds = \frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{+\infty}\|f_k(s)\|^2 ds$$

Alors on déduit que:

$$E\int_{t_0}^{+\infty}\|x(t)\|^2 dt \le \frac{c}{\alpha}\left[\|x_0\|^2 + \sum_{k=0}^{r}\int_{t_0}^{+\infty}\|f_k(s)\|^2 ds\right]$$

donc $\exists\, \beta > 0$ t.q.

$$E\left(\int_{t_0}^{+\infty}\|x(t)\|^2 dt\right) \le \beta\left[\|x_0\|^2 + \sum_{k=0}^{r}\int_{t_0}^{+\infty}\|f_k(s)\|^2 ds\right]$$

2) Etudions la stabilité en moment d'ordre 2 du système :

$$\begin{cases} dx(t) = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & -a \end{bmatrix} x(t)\,dt + b\,x(t)\,dw(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

On a :

$A^T P + PA + A_1^T P A_1 + I = 0 \iff A^T P + PA + b^2 P + I = 0$, où $A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b^2 - 2a) P_1 + 2P_2 + 1 = 0 \\ (b^2 - 2a) P_2 + P_3 = 0 \\ (b^2 - 2a) P_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_3 = \frac{1}{2a - b^2},\quad P_2 = \frac{1}{(b^2 - 2a)^2},\quad P_1 = \frac{-1 - 2P_2}{b^2 - 2a}$$

$$\det P = P_1 P_3 - P_2^2 = \frac{2P_2}{(b^2 - 2a)^2} > 0$$

Alors le système est stable en moment d'ordre 2 ssi $b^2 - 2a < 0$.

Exercice 2 : (obs)

1) (A, A_1, B) est contrôlable $\Rightarrow \exists \tau > 0 ;\ \int_0^\tau e^{Lt} BB^T\,dt > 0$

soit $L(P) = AP + PA^T + A_1^T P A_1 = M(P) + G(P)$, où $M(P) = AP + PA^T$

et $G(P) = A_1^T P A$. Alors :

$$\int_0^\tau e^{Lt} BB^T\,dt = \int_0^\tau e^{M(P)t} BB^T\,dt + e^{G(P)} BB^T\,dt > 0$$

On considère le système $\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = (M + G)\,y(t) \\ y(0) = BB^T \end{cases}$

La solution de ce système est : $y(t) = e^{(M+G)t} BB^T$

D'autre part, la solution du système : $\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = M y(t) + G y(t) \\ y(0) = BB^T \end{cases}$

est $y(t) = e^{(M + \cancel{G})t} BB^T + \int_0^t e^{M(t-s)}\, G(y(s))\,ds$

comme $G(y(t)) > 0$ alors $y(t) > 0$

2) $\operatorname{rang}(B\ \ AB) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow (A_0, B)$ est contrôlable

$\Rightarrow (A_0, A_1, B)$ est contrôlable.

Etudions la stabilisabilité du système (A_0, A_1, B). On a :

$$AX + XA^T + B\Gamma + \Gamma^T B^T + A_1 X A_1^T + I_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 x_1 + ab x_2 & \\ ab x_2 & b^2 x_3 \end{pmatrix} + I_2 = 0$$

Exercice 3: (07/50)

1) L'équation de la programmation dynamique est:

$$\inf_{u\in\mathbb{R}} \{ (Ax+Bu)^T V_x + \frac{1}{2}\sum c_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + x^T Qx - u^T Ru - \lambda V(x)\} = 0$$

Soit $V(x) = x^T P x + \alpha$. On a:

$$x^T A^T P x + x^T P A x + x^T Q x - \lambda x^T P x - \lambda\alpha + x^T B_1^T P B_1 x + \inf_{u\in\mathbb{R}} \{2u^T B^T P x$$
$$+ u^T B_2^T P B_2 u + u^T R u\} = 0$$

On trouve que le contrôle minimisant est:

$$u^*(t) = -(R + B_2^T P B_2)^{-1} B^T P x$$

On remplace $u^*(t)$ dans l'équation d'H.J.B, on trouve:

$$(A^T - \frac{\lambda}{2} I) P + P(A - \frac{\lambda}{2} I) + Q + B_1^T P B_1 - PB(R + B_2^T P B_2)^{-1} B^T P = 0$$

et le coût minimal est $J^*(u) = x_0^T P x_0$

2) L'équation de la programmation dynamique est:

$$\inf \{ A_u V(x) + Q - \lambda V(x)\} = 0$$

$$\inf \{ A_u V(x) + x^\alpha (a u(t) + b)^{1-\frac{1}{a}} - \lambda V(x)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \inf \{ (\mu - u) x V_x + \frac{1}{2} b^2 x^2 V_{xx} + x^\alpha (a u(t) + b)^{1-\frac{1}{a}} - \lambda V(x)\} = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \inf \{ \mu (V_x) x - V_x) x u + \frac{1}{2} b^2 x^2 V_{xx} + (a u(t) + b)^{1-\frac{1}{a}} x^\alpha - \lambda V(x)\} = 0$$

Soit $V(x) = P x^\alpha$, alors $V'(x) = \alpha P x^{\alpha-1}$ et $V_{xx} = \alpha(\alpha-1) P x^{\alpha-2}$

Alors l'équation $(*)$ est équivalente à:

$$\inf_u \{ \mu_\alpha P x^\alpha - \alpha u P x^\alpha + \frac{1}{2} b^2 \alpha(\alpha-1) P x^\alpha + (a u(t) + b)^{1-\frac{1}{a}} x^\alpha - \lambda P x^\alpha\} = 0$$

$$\Rightarrow \{ (\mu \alpha P + \frac{1}{2} b^2 \alpha(\alpha-1) P - \lambda P) x^\alpha - \alpha P x^\alpha u + (a u(t) + b)^{1-\frac{1}{a}} x^\alpha\} = 0$$

le contrôle minimisant satisfait:

$$-\alpha P x^\alpha + a(1 - \frac{1}{a})(a u(t) + b)^{-\frac{1}{a}} x^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow (-\alpha P + (a-1)(a u^*(t) + b)^{-\frac{1}{a}}) x^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow (a u^*(t) + b)^{-\frac{1}{a}} = \frac{\alpha}{a-1} P \Rightarrow a u^*(t) + b = \left(\frac{a-1}{\alpha} P^{-1}\right)^a$$

$$\Rightarrow u^*(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{a-1}{\alpha}\right)^a P^{-a} - \frac{b}{a}$$

On remplace $u^*(t)$ dans l'équation d'H-J-B, on trouve:

$$(\mu\alpha P + \frac{1}{2} b^2 \alpha(\alpha-1) P - \lambda P) x^\alpha - \frac{\alpha P}{a} x^\alpha \left(\left(\frac{a-1}{\alpha}\right)^a P^{-a} - b\right) + \left(\left(\frac{a-1}{\alpha} P^{-1}\right)^a\right)^{1-\frac{1}{a}} x^\alpha = 0$$

$$(\mu\alpha P + \frac{1}{2} b^2 \alpha(\alpha-1) P - \lambda P) - \frac{\alpha P}{\alpha} \left(\frac{a-1}{a}\right)^a P^{-a} - \left(\frac{a-1}{\alpha}\right) P^{1-a} = 0$$

$$\Rightarrow (\mu\alpha P + \frac{1}{2} b^2 \alpha(\alpha-1) P - \left[\frac{1}{a}(a-1)^a P^{1-a} + \frac{a-1}{\alpha} P^{1-a}\right] = 0$$

$$\Rightarrow (\mu\alpha + \frac{1}{2} b^2 \alpha(\alpha-1) - \lambda) P - \left[\frac{(a-1)^a}{a} + \frac{a-1}{\alpha}\right] P^{1-a} = 0$$

$$\Rightarrow (\mu\alpha + \frac{1}{2} b^2 \alpha(\alpha-1) - \lambda) P - \left[\frac{(a-1)^a}{a} + \frac{a-1}{\alpha}\right]$$

et le coût minimal est: $J^*(u) = P x_0^\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = (-1-2X_2)/a^2 \\ X_3 = (-1-2f_2 - 2X_2)/b^2 \\ X_2 = (-(X_1+X_3)-f_1)/2ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det X = X_1X_3 - X_2^2 = X_1X_3 - \frac{((X_1+X_3)+f_1)^2}{(2ab)^2}$$

$$= X_1X_3 - \frac{[X_1^2 + 2X_1X_3 + X_3^2 + f_1^2 + 2f_1X_3 + 2f_1X_1]}{4a^2b^2}$$

$$= \frac{(4a^2b^2-2)X_1X_3 - X_1^2 - X_3^2 - f_1^2 - 2f_1X_3 - 2f_1X_1}{4a^2b^2}$$

$$\det X > 0 \Leftrightarrow X_1X_3 > \frac{((X_1+X_3)+f_1)^2}{(2ab)^2} \quad \text{—— } (*)$$

$X_1 > 0 \Leftrightarrow -1-2X_2 > 0 \Leftrightarrow 1+2X_2 < 0 \Leftrightarrow X_2 < -\frac{1}{2}$

$X_3 > 0 \Leftrightarrow -1-2f_2-2X_2 > 0 \Leftrightarrow 2X_2 + (1+2f_2) < 0 \Rightarrow X_2 < \frac{-(1+2f_2)}{2}$ —— $(**)$

s'ils existent f_1 et f_2 satisfaisant les conditions $(*)$ et $(**)$ alors le système (A, B) est stabilisable.