Faculté de Mathématiques et informatiques
Département de Mathématiques
07/04/2019

Master 1 MA

Durée: 1h30m

## Examen de rattrapage analyse fonctionnelle appliquée

**Exercice 1** Soit l'ensemble

$$Z = \{f \in L^2(a,b),\ f \text{est absolument continue sur } (a,b) \text{avec } \frac{df}{dt} \in L^2(a,b) \text{et } f(a) = 0\}.$$

Soit $\langle .,. \rangle_Z$ un produit scalaire défin sur $Z \times Z$ par : $\forall f, g \in Z$, $\langle f, g \rangle_Z = \langle \frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt} \rangle_{L^2(a,b)}$.
Montrer que $Z$ est un espace de Hilbert.

**Exercice 2** Soit $H = L^2([a,b])$ et $K \in L^2([a,b] \times [a,b])$. Soit $T$ l'opérateur défini par

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt.$$

1. Montrer que $T$ est linéaire borné sur $H$.
2. Calculer $T^*$ l'adjoint de $T$.

**Exercice 3** Soient $H$ un espace de Hilbert et $T : D(T) \subset H \to H$ un opérateur linéaire, le noyau de $T$ est défini par $ker(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$. Montrer que

1. Si $D(T)$ est dense dans $H$, alors $ker(T^*) = R(T)^\perp$.
2. Si $D(T^*)$ est dense dans $H$, alors $ker(T) = R(T^*)^\perp$.
3. Si $R(T)$ est fermé et $R(T)$ est dense dans $H$ et
$\exists C > 0$ tel que $\|Tx\| \geqslant C\|x\|$, $\forall x \in D(T)$, alors $T$ est un opérateur fermé.
4. Si $T$ est un opérateur fermé et $\exists C > 0$ tel que $\|Tx\| \geqslant C\|x\|$, $\forall x \in D(T)$, alors $R(T)$ est fermé.

# Correction examen de rattrapage Ana-Fonc-App

**Exercice 01 : (05 pts)**

Montrons que $Z = \{ f \in L^2(a,b), f \text{ abs con sur } [a,b], \frac{df}{dt} \in L^2 \text{ et } f(a) = 0 \}$ est fermé dans $L^2(a,b)$.

soit $(f_n)$ une suite dans $Z$ telle que $f_n \to f$ et $\frac{df_n}{dt} \to g$,
montrons que $f \in Z$ et $\frac{df}{dt} = g$ $\Big\}$ (1 pt)

on définit $h$ par : $h(s) = \int_a^s g(t)\,dt$ et montrons que $h = f$ --- (0,5 pt)

on a : $\|h - f\|_{L^2} \leq \|f_n - f\|_{L^2} + \|f_n - h\|_{L^2}$ ----- (0,5 pt)

$$= \|f_n - f\|_{L^2} + \left[ \int_a^b \left| \int_a^b 1_{[a,s]} (g(t) - f_n'(t))\,dt \right|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \text{ -- (0,5}$$

$$\leq \|f_n - f\|_{L^2} + \left[ \int_a^b \|1_{[a,s]}\|^2_{L^2} \cdot \|g - f_n'\|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \text{ ---- (1 pt)}$$

$$\leq \|f_n - f\|_{L^2} + M \|g - f_n'\|_{L^2} \text{ ---- (0,5 pt)}$$

Comme $f_n \to f$ et $\frac{df_n}{dt} \to g$, alors on déduit que $f = h$, $\Big\}$ (1 pt)
par conséquent $f \in Z$ et $Z$ est fermé dans $L^2(a,b)$, donc
$Z$ est un espace de Hilbert.

**Exercice 02 (6 pts)**

1) soit $f \in H = L^2(a,b)$, $\forall x \in [a,b]$.

$$|Tf(x)|^2 \leq \int_a^b |k(x,t)|^2 \cdot |f(t)|^2 dt.$$

$$\leq \|f\|_2^2 \cdot \int_a^b |k(x,t)|^2 dt \text{ (inég Cauchy-Schwarz) ---- (1 pt)}$$

En intégrant par rapport à $x$ on obtient :

donc $Ty \in D(T)^{\perp} = \{0\}$, d'où $y \in \ker T^*$ ---- (0,5 pt)

c.à.d $R(T)^{\perp} \subset \ker T^*$ ------(*) ----- (~~0,5 pt~~)

- soit $y \in \ker T^*$, alors $\langle T^* y, x\rangle = 0 = \langle y, Tx\rangle$, $\forall x \in D(T)$ --- (0,5 pt)

donc $y \in R(T)^{\perp}$ ---- (0,5 pt) c.à.d $\ker(T^*) \subset R(T)^{\perp}$ ---(**)

De (*) et (**) on obtient : $\ker T^* = R(T)^{\perp}$.

2) soit $y \in R(T^*)^{\perp} \cap D(T)$, alors $\langle y, T^* z\rangle = 0$, $\forall z \in D(T^*)$ --- (0,5 pt)

$\langle y, T^* z\rangle \overset{(0,5 pt)}{=} \langle Ty, z\rangle = 0$, $\forall z \in D(T^*) \Rightarrow Ty \in D(T^*)^{\perp} = \{0\}$ --- (0,5 pt)

il s'ensuit que $y \in \ker T$, d'où $R(T^*)^{\perp} \subset \ker T$ ---(***)

soit $y \in \ker T$, $\forall x \in D(T^*)$, alors $\langle Ty, x\rangle = 0 = \langle y, T^* x\rangle$, ---- (0,5 pt)

alors $y \overset{(0,5 pt)}{\in} R(T^*)^{\perp}$, d'où $\ker T \subset R(T^*)^{\perp}$ ---- (****)

De (***) et (****) on obtient $\ker T = R(T^*)^{\perp}$

3) si $R(T)$ est fermé et dense dans $H$, alors $T$ est surjectif ---- (0,5 pt)

Comme $\exists c > 0 /$ $\|Tx\| \geq c\|x\|$, $\forall x \in D(T)$, alors $T$ est injectif ---- (1 p)

donc $T$ est $\overset{(0,5 pt)}{\text{inversible}}$, $T^{-1} : H \to D(T)$ est borné, donc $T$ est fermé --(0,5 pt)

4) Montrons que $R(T)$ est fermé, soit $y \in \overline{R(T)}$, alors $\exists (x_n) \subset D(T)$ tq :

$Tx_n \to y$, montrons que $y \in R(T)$. Comme $(Tx_n)$ est convergente, alors (0,5 pt)

c'est une suite de Cauchy et on a :

$\forall p, q \in \mathbb{N}$, $\|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{c} \|Tx_p - Tx_q\|$, ---- (0,5 pt)

alors $(x_n)$ est une suite de Cauchy dans $D(T) \subset H$, alors $x_n \to x$ --(0,5 pt)

et on a $Tx_n \to y$, comme $T$ est fermé, alors $y = Tx$ --- (1 pt)

d'où $y \in R(T)$ et $R(T)$ est fermé.

$$\int_a^b |Tf(x)|^2 dx \leq \|f\|_2^2 \cdot \int_a^b \left( \int_a^b |k(x,t)|^2 dt \right) dx.$$

$$= \|f\|_2^2 \cdot \int_{[a,b]\times[a,b]} |k(x,t)|^2 dt\, dx \text{ ------ } (1\,pt)$$

$$= \|f\|_2^2 \cdot \|k\|^2_{L^2([a,b]\times[a,b])} \text{ ---- } (0,5\,pt)$$

par conséquent:

$$\|Tf\|^2_{L^2} \leq \|f\|^2_{L^2} \cdot \|k\|^2_{L^2([a,b]\times[a,b])} \text{ ------ } (0,5\,pt)$$

D'où $\|T\|_{L(H)} \leq \|k\|_{L^2}$, alors $T$ est borné sur $H$ ----- $(0,5\,pt)$

2) Calculons $T^*$ l'adjoint de $T$, $\forall f,g \in L^2(a,b)$.

$$\langle Tf, g \rangle_{L^2} = \int_a^b Tf(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx \text{ ------ } (0,5\,pt)$$

$$= \int_a^b \left( \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt \right) \cdot \bar{g}(x)\, dx.$$

$$= \int_a^b f(t) \left[ \int_a^b k(x,t) \cdot \overline{g(x)}\, dx \right] dt \text{ ---- } (0,5\,pt)$$

$$= \int_a^b f(t) \left[ \overline{\int_a^b \overline{k(x,t)} \cdot g(x)\, dx} \right] \cdot dt \text{ ------ } (1\,pt)$$

$$= \langle f, T^* g \rangle.$$

Alors $T^* g(t) = \int_a^b \overline{k(x,t)} \cdot g(x)\, dx$ ------ $(0,5\,pt)$

Exercice 03 (5 pts)

1) $D(T)$ est dense dans $H$, alors $D(T)^\perp = \{0\}$.

soit $y \in R(T)^\perp$, $\forall x \in D(T)$, alors $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = 0$ --- $(0,5\,pt)$