Corrigé type Rattrapage EDO

Ex ① (6pts)

La sol maximale de $y'=f(t,y)$ — (E) est toujours définie sur 1 ouvert J ? Si on suppose le contraire, i.e. la sol de (E) est maximale, donc non prolongeable au delà de $J \subset I$ et en même temps, cette sol sera déf sur 1 intervalle non ouvert J (semi-ouvert ou fermé). La nature de J ; qui au moins fermé d'1 côté va nous permettre par d'agrandir cet intervalle de ce côté, ce qui en fera 1 prolongement et là on aura la contradiction avec la maximalité de la solution.

Ex ② (8pts)

$$(P)\begin{cases} y' = 3|y|^{2/3} \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad I = \Omega = \mathbb{R}.$$

Méthode ① (Résolution Directe de (P))

Puisque $y(0)=0$, on remarque que $y(t)=0$ $\forall t \in I$ est aussi sol de (P) ②. En plus si $y \neq 0 \Leftrightarrow y>0$ ou $y<0$ on a :

$$\frac{dy}{dt} = 3|y|^{2/3} \Rightarrow \begin{cases} y^{-2/3}\,dy = dt, \text{ si } y>0 \text{ — ①} \\ -y^{-2/3}\,dy = dt, \text{ si } y<0 \text{ — ②} \end{cases}$$

① $\Rightarrow$ ④ $\int y^{-2/3}\,dy = \int dt$, $y>0$ $\Rightarrow$ $y=t^3$, $y>0$ donc $t>0$

② $\Rightarrow$ ② $\int y^{-2/3}\,dy = -\int dt$, $y<0$ $\Rightarrow$ $y=-t^3$, $y<0$ donc $t>0$

Méthode ② Application du théo de Cauchy Lipschitz (C-L).

- f continue ②. Mais f loc Lip ? Supposons que oui donc au voisinage de $(0,0)$ on a $\exists k \geq 0$ tq $3\left||y_1|^{2/3} - |y_2|^{2/3}\right| \leq k|y_1 - y_2|$

Spécialement si $y_2 = 0$ on aura $\dfrac{|y_1|^{2/3}}{|y_1|} \leq \dfrac{k}{3}$ et donc

$$\lim_{y_1 \to 0} |y|^{-1/3} \leq k$$

. Absurde. Ainsi f non loc Lip. Ce qui nous fera perdre l'unicité ⑥

Scanned by CamScanner

Corrigé type EDO (suite)

Méthode (3) Continuité de $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$?

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 0$ Mais $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \begin{cases} 2\, y^{-1/3} & \text{si } y>0 \\ -2\, y^{-1/3} & \text{si } y<0 \end{cases}$; qui n'est pas continue en tous les pts. ~~[illegible]~~

Ex (3) (6 pts)

$Y' = A.Y + B(t)$, $A = \alpha I_3 + N$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Méthode (1) $Y = Y_H + Y_p$ où $Y_H = e^{tA}.C$, $C \in \mathbb{R}^3$ vect cte.

$Y_p = e^{tA}.c(t)$ où $c'(t) = e^{-tA} B(t)$ et donc

$c(t) = \int c'(t)\,dt = \int e^{-ts} B(s)\,ds$, avec

$$e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode (2) si $Y_0 = Y(t_0)$ on a $Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\,ds$

Remarque La moindre erreur dans les calculs annulera l'exercice.

Scanned by CamScanner