Exercice 1 : Soit $E = C([-1,1])$ l'espace vectoriel préhilbertien des fonctions continues à valeurs réelles. On définit l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$:

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \qquad \forall f, g \in E$$

- Vérifier que $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhiblertien.

- Soit la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ 1 - nx & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Montrer la convergence de la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ vers la fonction nulle dans $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

- On considère la suite $\{g_n\}_{n\geq 1}$ définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx & si\ -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -1 & si\ -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

a) Montrer que $\|g_{n+p} - g_p\|^2 = \dfrac{2p^2}{3n(n+p)^2}$

b) En déduire que $\{g_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$

c) Etudier la convergence de $\{g_n\}_{n\geq 1}$ dans $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$

d) Conclure

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{C}^n$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Montrer que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ définie par $\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$ est un produit scalaire sur E

1) On pose $u = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Calculer les quantités suivantes : $\langle u | v \rangle$, $\|u\|^2$, $\|v\|^2$ et $\|u+v\|^2$.

2) Que peut-on Conclure ?

Exercice 3 : Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel préhilbertien sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$\forall x,y\in E:\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2\Rightarrow\langle x|y\rangle=0$

Exercice 4 : Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. On suppose que la norme vérifie l'identité du parallélogramme. On définit l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle:E\times E\to\mathbb{R}$ par

$$\langle x|y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$

Montrer que $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien.

Exercice 5 : Soit $E=\left(\mathbb{R}^n,\|\ \|_\infty\right)$ l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs réelles, muni de la norme :

$$\|x\|_\infty=\max_{i=1,\dots,n}|x_i|,\qquad \forall x\in E.$$

L'espace E est-il un espace préhilbertien ?

Exercice 6: Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer que si $\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_n$ sont des éléments non nuls de E, deux à deux orthogonaux, sont linéairement indépendants.

Exercice 7 : Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et A une partie de E

1) Montrer que l'ensemble $A^\perp=\{x\in E,\ \forall a\in A\ \langle a|x\rangle=0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.
2) $A\subset B\Rightarrow B^\perp\subset A^\perp$
3) Montrer que si A est un sous-espace vectoriel de E alors $\left(A^\perp\right)^\perp=\overline{A}$

Exercice 8 : Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer que pour tout $x,y\in E$

$$|\langle x|y\rangle|=\|x\|\|y\| \text{ si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont liés.}$$

Exercice 9 : Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et la boule fermée $B=\overline{B}(0,1)$ de E

On rappelle que $d(x,B)=\inf\{\|x-y\|:y\in B\}$

Montrer que qu'il existe un élément $x^*\in B$ unique tel que $d(x,B)=\|x-x^*\|$.

Montrer que

$$x^* = \begin{cases} x & \text{si } x \in B \\ \dfrac{x}{\|x\|} & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

Exercice 10 : Soit $\left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot | \cdot \rangle\right)$ un espace de Hilbert euclidien.

1) Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2) Soit le plan $P = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$ et le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer u^* la projection orthogonale du vecteur u sur P.

Exercice 11 : Soit $\left(\prod_3 [-1,1], \langle \cdot | \cdot \rangle\right)$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré 3.

1) Construire une base orthogonale de $\prod_3$ (utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt)

2) Calculer la meilleur approximation de la fonction $f(x) = x^4$ par un polynôme de degré 3.

Exercice 12 : Soit $E = C\left([0, a]\right)$ ($a > 0$) l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs complexes muni du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int_0^a f(t)\overline{g}(t)dt$

Montrer que la famille $\left\{ e_k(x) = e^{2i\pi k \frac{x}{a}} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est un système orthogonal

Exercice 13 : Soit $\left(E, \langle \cdot | \cdot \rangle\right)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$.

1) Calculer $\|u + \lambda v\|^2$ pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que si $\|u + \lambda v\| \geq \|u\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ alors u et v sont orthogonaux
3) Soit $\left(E, \langle \cdot | \cdot \rangle\right)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$. Montrer que si $\|u + \lambda v\| \geq \|u\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ alors u et v sont orthogonaux