Université de Batna **2ème année Mathématiques**

Faculté de mathématiques et d'informatique **2019-2020**

Département de mathématiques **Module : Analyse 03**

Série 1

Exercice 1 : Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{2}{n(n+2)}$

1) Calculer les sommes partielles et en déduire la nature de la série.
2) Calculer le reste d'ordre $n = 100$

Exercice 2 : Etudier la nature des séries suivantes :

$$1)\ \sum \sin n\alpha,\ \ \alpha \neq m\pi\ ,\ m \in \mathbb{Z}\ ,\quad 2)\ \sum \frac{2^n + n}{2^n.n},\quad 3)\ \sum \sqrt{n^2+n} - n.$$

Exercice 3 :

1) En comparant à une série de Riemann, déduire la nature des séries suivantes :

$$1)\sum \frac{1}{n^2+n+1},\quad 2)\sum_{n\geq 1} \frac{e^n + n^4}{3^n + ln(n+1)},\quad 3)\sum ne^{-\sqrt{n}},\quad 4)\sum \ln(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}).$$

2) En comparant à une série de Bertrand, déduire la nature des séries suivantes :

$$1)\sum_{n\geq 2} \frac{n+3}{(n^2+1)(\ln n)^{3/2}},\quad 2)\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n}{n},\quad 3)\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n + \ln^3 n}{n^3 + \sqrt{n}}.$$

Exercice 4(supp) : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, montrer que :

1) $\sum u_n \ converge \Rightarrow \sum {u_n}^2 \ \ converge$, qu' en est il pour l'inverse **?**

2) **L**es séries $\sum u_n$ *et* $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$. sont de même nature.

Exercice 5(supp) : Soient les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ à termes positifs et convergentes**.**

Etudier la nature de la série $\sum \sqrt{u_n.v_n}$.

Exercice 6 : Critère de Cauchy et d'Alembert

Utiliser les critères de Cauchy et d'Alembert pour étudier la nature des séries suivantes :

$$1)\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},\ 2)\sum\frac{2n!}{n!.n^n},3)\sum\frac{n^{10}}{2^n},4)\sum(\cos(1/n))^{n^3},5)\sum\frac{n^n}{(n!)^k}\ (k\in\mathbb{R}),6)\sum\left(\frac{(n-1)^2}{n^2+1}\right)^{n^2/2}.$$

Exercice 7 : En utilisant la règle de Raabe-Duhamel, étudier la nature de la série dont le terme général est $u_n=\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6.....2n}$.

Exercice 8 :

1) Vérifier que les séries $\sum\dfrac{(-1)^n n^2}{2^n}$ *et* $\sum\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$ sont alternées et étudier leur convergence.

2) A-t-on la convergence absolue ?

Exercice 9 :

1) Etudier les séries $\sum\dfrac{\cos n}{n}$ *et* $\sum\dfrac{\sin n}{(\ln n)^3}$ en utilisant la règle d'Abel.

2) Est-ce qu'on a la convergence absolue ?

Exercice 10 : Ecrire un développement limité pour la suite de terme général u_n puis déduire la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

$$a)\,u_n=\frac{\cos n}{\sqrt{n}+2\sin n},\ b)\ u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+(-1)^n}.$$

Exercice 11 :

1) Sachant que $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$**,** calculer $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$.

2) Sachant que $\sum\limits_{n\geq0}\dfrac{1}{n!}=e$**,** calculer $\sum\limits_{n\geq0}\dfrac{3n-5}{n!}$ *et* $\sum\limits_{n\geq0}\dfrac{n^2}{n!}$.