Université de Batna **2$^{\text{ème}}$ année Mathématiques**

Faculté de mathématiques et d'informatique **2019-2020**

Département de mathématiques **Module : Analyse 03**

Série 2

Exercice 1 : Soit la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par: $f_n(x)=\dfrac{n^2x}{1+n^3x^3}, n\geq 1.$

1) Démontrer la convergence simple de cette suite.
2) Calculer $\max\limits_{x\geq 0} f_n(x)$ et en déduire qu'on n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2 (supp): Etudier la convergence simple puis uniforme sur la partie $D\subseteq\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

1) $f_n(x)=nx^n(1-x),\ n\geq 0,\ D=[0,1]$. 2) $f_n(x)=ne^{-n^2x^2},\ n\geq 0,\ D=[a,+\infty[,\ a\rangle 0.$

Exercice 3 : Soit la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\geq 1}$ définies par : $f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(nx)}{nx} & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$

1) Montrer que $\{f_n\}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $f_n(\dfrac{\pi}{2n})$ et en déduire qu'on n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer une partie $E\subset\mathbb{R}$ où il y a convergence uniforme.

Exercice 4(supp) : Soit la suite de fonctions $\{u_n\}_{n\geq 1}$ définies par:
$u_n(x)=n\sin x(\cos x)^n, n\geq 1,\ x\in[0,\pi/2]$.

1) Démontrer que cette suite converge simplement dans $[0,\pi/2]$.

2) Calculer $I_n=\int_0^{\pi/2}u_n(x)dx$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ en déduire qu'on n'a pas convergence uniforme sur $[0,\pi/2]$.

Exercice 5 : Soit la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\geq 1}$ définies sur $[0,1]$ par $f_n(x)=x^n(1-x),\ n\geq 1.$

Montrer sa converge uniformément vers la fonction nulle et en déduire la valeur de
$I_n=\int_0^1 t(1-t)^n dt.$

Exercice 6 : Soit la série de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par: $\sum_{n\geq 0} x(1-x)^n$.

Démontrer la convergence simple de cette série dans $[0,2[$ et discuter la convergence uniforme sur $[0,2[$.

Exercice 7 : Etudier la convergence simple puis normale et uniforme des séries de fonctions dont les termes généraux sont:

1) $f_n(x) = \dfrac{(-1)x}{(1+x^2)^n}$ $n \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$.   2) $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$, $n \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 8 : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2x^2+n}$.

Montrer que cette série converge absolument et uniformément mais pas normalement sur $]0,1]$.

Exercice 9 : Soit la fonction f définie pour chaque $x \in \mathbb{R}$ par: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1) Etudier la convergence simple de la série et en déduire le domaine de définition de f .

2) Montrer que la série converge uniformément sur $[a,+\infty[\ ;\ \forall a \rangle 0$ et en déduire le domaine de continuité de f .

3) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty]$ et exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions élémentaires.

Exercice 10 : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin nx}{n^3}$.

1) Montrer sa convergence simple sur $\mathbb{R}$ et déterminer le domaine de définition et de continuité de la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin nx}{n^3}$.

3) Montrer que $\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$

4) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos nx}{n^2}$.