Exercice 1 : Soit $\Omega = \mathbb{R}, \Sigma = B(\mathbb{R}), \mu$ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1) On pose $f_n = \chi_{[0,n]}; n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{f_n\}$ est monotone et converge vers une fonction f que l'on déterminera

2) Est-ce que le théorème de convergence monotone s'applique dans ces cas

   a. $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty[}; \quad n \in \mathbb{N}^*$.

   b. $f_n = -\chi_{[n,+\infty[}; \quad n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos^n(\pi x)dx.$

Exercice 3 (Théorème de dérivation sous le signe intégral) :

Soit Ω un espace mesurable et soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

1) Pour tout $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, la fonction $x \to f(x,t)$ est intégrable.

2) Pour presque tout x ; la fonction $t \to f(x,t)$ est dérivable.

3) Il existe $g \in L^1(\Omega)$ tel que pour tout $t \in [a,b]$ et pour presque tout x on ait $\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| \le g(x)$.

Montrer que la fonction $h : t \to \int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx$ est dérivable sur $[a,b]$ et on a

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

Exercice 4 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\sin(x-t)dt$ est bornée et dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 5 : Décomposer en série de Fourier la fonction 2-periodique:
$f(x) = \chi_{]0,1]}(x) - \chi_{]-1,0]}(x)$

En déduire la valeur de $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2}$

Exercice 6 : On considère l'intervalle $I=[0,1]$. Déterminer $1\leq p\leq +\infty$ tel que $f\in L^p(I)$ dans les cas suivants :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases} \qquad \text{et} \qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^{\alpha}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases} \qquad \text{où} \quad \alpha>0$$

Exercice 7 : On considère l'intervalle $I=[1,+\infty[$ et la fonction:

$$f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}} \quad \text{où} \quad \alpha>0$$

Déterminer $1\leq p\leq +\infty$ tel que $f\in L^p(I)$

Exercice 8 Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$. Donner un exemple, (s'il existe), d'une fonction f vérifiant les propriétés des cas suivants :

1. $f\in L^1([0,1])$ et $f\notin L^2([0,1])$
2. $f\notin L^1([0,1])$ et $f\in L^2([0,1])$
3. $f\notin L^1([0,1])$ et $f\notin L^2([0,1])$
4. $f\notin L^1\left([0,+\infty[\right)$ et $f\in L^2\left([0,+\infty[\right)$
5. $f\in L^1\left([0,+\infty[\right)$ et $f\notin L^2\left([0,+\infty[\right)$

Exercice 9 (*Inégalité de Hölder*) Soit $p,q,r\geq 1$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$.

Soit $f\in L^p(\Omega)$ et $g\in L^q(\Omega)$. Démontrer que $fg\in L^r(\Omega)$ et $\|fg\|_r\leq \|f\|_p\|g\|_q$

Exercice 10 : Soit $f,g\in L^3(\mathbb{R})$. Montrer que $f^2g\in L^1(\mathbb{R})$.
Indication : *Utiliser l'inégalité de Hölder*

Exercice 11 Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

$f(x)=e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda>0$

$g(x)=\chi_{[-a,a]}(x), \quad a>0$

$h(x)=\cos(\lambda x)\chi_{[-a,a]}(x), \quad a,\lambda>0$

Exercice 12: Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } -1\le x\le 0\\ 1 & \text{si } 0<x\le 1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}1+x & \text{si } -1\le x\le 0\\ 1-x & \text{si } 0<x\le 1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 13 Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$

1. Pour $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, on pose $g(x)=f(\lambda x)$. Montrer que $\hat{g}(\xi)=\frac{1}{|\lambda|}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$

2. Pour $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\mu\in\mathbb{R}$, on pose $g(x)=f(\lambda x-\mu)$. Montrer que
$$\hat{g}(\xi)=\frac{1}{|\lambda|}e^{-2i\pi\frac{\mu}{\lambda}\xi}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

Exercice 14 Soit $f(x)=e^{-ax^2}$, où $a>0$.

1. Vérifier que $f'(x)=-2axf(x)$

2. Montrer que
$$\hat{f}'(\xi)+\frac{2\pi^2}{a}\xi\hat{f}(\xi)=0.$$

3. Montrer que $g(\xi)=e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$ est une solution particulière de l'équation différentielle de la question précédente.

4. En déduire la transformée de Fourier de la fonction f.

On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Exercice 15 :

1. En utilisant la transformée de Fourier, examiner l'existence d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g = f$, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.

2. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation : $f * f = f$